TIPE: L'équation de la chaleur

Maxime Cauchois, Pierre-Emmanuel Émeriau, Marguerite Flammarion

25 juin 2013

Table des matières

Introduction à l'équation de la chaleur

Comment décrire l'évolution de la température dans une pièce, sachant la température initiale et la température à l'extérieur ? L'équation de la chaleur aux dérivées partielles vise à décrire ce phénomène. En effet, la physique montre que la fonction scalaire température T dans l'espace est régie par l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\Delta T + \frac{P}{\rho c}$$

avec Δ l'opérateur laplacien, D le coefficient de diffusivité thermique, ρ la masse volumique de matériau , P la production volumique de chaleur et c la chaleur massique du matériau. Dans toute la suite, on considérera $P = 0$, et l'on notera $c = \frac{1}{D}$. L'équation devient alors :

$$\Delta T = c\frac{\partial T}{\partial t}$$

soit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = c\frac{\partial T}{\partial t}$$

Cette équation reste valable à 1 ou 2 dimensions, qui feront l'objet de notre étude. En effet, dans le cas du problème à 1 dimension, il existe des solutions analytiques au problème dit de conditions aux bords (c'est à dire dans lequel la température aux bords du domaine d'étude est imposée) par le biais de l'analyse de Fourier. Pour ce qui est du problème à deux dimensions, nous verrons que des méthodes numériques permettent d'approcher les solutions réelles de façon très satisfaisante.

I Théorème des conditions aux bords

I.1 Théorème d'existence et d'unicité

Soit c une constante positive et $f(t)$ une fonction continue 2π-périodique sur $\mathbb{R}^+$. Alors il existe une unique fonction $u(x,t)$ où $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{+*}$ satisfaisant aux propriétés suivantes :

a) $u(x,t)$ est 2π-périodique en t pour tout x.

b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$ sont continues sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

c) u vérifie $\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{+*}$.

d) La fonction u converge uniformément vers f par rapport à t lorsque x tend vers 0, c'est à dire que :

$$\lim_{x \to 0^+} \sup_{t \in \mathbb{R}^{+*}} |u(x,t) - f(t)| = 0$$

e) La solution u est donnée par la formule suivante :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{+*}, \quad u(x,t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{-\alpha_n x} e^{\imath n t - \imath\, sgn(n) \alpha_n x} \tag{1}$$

où :

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) e^{-\imath n t}\,\mathrm{dt} \quad \text{et} \quad \alpha_n = \sqrt{\frac{|n|}{2c}}.$$

I.2 Propriétés de la solution

R1 : lorsque x tend vers l'infini, la température tend vers une valeur uniforme donnée par la valeur moyenne de f sur $[0, 2\pi]$.

R2 : l'équation de la chaleur a un effet régularisant : pour $x > 0$ et $t > 0$, la solution $u(x,t)$ est de classe C^∞ même si la fonction ne l'est pas.

R3 : il existe un principe du maximum :

$$\forall x > 0, \sup_{t\in\mathbb{R}^+} |u(x,t)| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}^+} |f(t)| \tag{2}$$

qui explique le fait qu'en un point $x > 0$ la variation de température ne peut pas être supérieure à celle induite par $f(t)$ au point $x = 0$.

II Démonstration du PCB

II.1 Analyse de Fourier

Soit g une application 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition

On appelle coefficients de Fourier (exponentiels) de g les nombres complexes :

$$\widehat{g}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-\imath nt}\mathrm{dt}$$

et série de Fourier de g la série trigonométrique :

$$S_g(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(n)e^{\imath nt}$$

Proposition

a) Si g est de classe C^1, la série de Fourier converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et sa somme est g.

b) Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $\widehat{g'}(n) = \imath n\widehat{g}(n)$

On suppose par la suite que f est de classe C^2 sur $[0, 2\pi]$.

II.2 Preuve du théorème PCB

La démonstration du théorème s'effectue en deux étapes principales : une étape d'**analyse**, dans laquelle on démontre que toute solution au problème s'écrit sous une forme unique $u(x,t)$ que l'on explicitera et une étape de **synthèse**, qui permet de vérifier que la solution $u(x,t)$ trouvée vérifie effectivement les propriétés décrites.

Étape d'analyse

Soit $u(x,t)$ une fonction solution au problème PCB. On note :

$$S_u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(x)e^{\imath nt},$$

la série de Fourier en temps de $u(x,t)$ où :

$$C_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,t)e^{-\imath nt}\mathrm{dt}$$

et

$$S_f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{\imath nt},$$

la série de Fourier de $f(t)$ où :

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-\imath nt}\mathrm{dt}$$

D'après les propriétés a) et b) du théorème PCB, $S_u(x,t)$ converge uniformément vers $u(x,t)$ pour tout $x>0$. D'après la proposition d) du théorème PCB, $u(x,t)$ converge uniformément en temps vers $f(t)$ quand x tend vers 0 c'est-à-dire que :

$$\lim_{x\to 0^+} \sup_{t\in\mathbb{R}^{+*}} |u(x,t)-f(t)| = 0$$

Soit $n\in\mathbb{Z}$. Montrons alors que $\lim\limits_{x\to 0^+} |C_n(x)-\widehat{f}(n)| = 0$.
Soit $\epsilon>0$.
Il existe $\eta>0$ tel que $\forall x\in\,]0\,;\eta], \forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $|u(x,t)-f(t)|\leq\epsilon$.
Soit $x\in\,]0\,;\eta]$. Alors :

$$\begin{aligned}
|C_n(x)-\widehat{f}(n)| &= |\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u(x,t)-f(t))dt| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(|u(x,t)-f(t)|)dt \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\cdot\epsilon\cdot 2\pi \\
&\leq \epsilon
\end{aligned}$$

Donc

$$\forall n\in\mathbb{Z},\, C_n(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \widehat{f}(n)$$

On multiplie alors l'équation de la chaleur, vérifiée par u, propriété c), par $e^{-\imath nt}$, puis on intègre entre 0 et 2π.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial t}e^{-\imath nt}\mathrm{dt} = \frac{c}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}e^{-\imath nt}\mathrm{dt}$$

A l'aide d'une intégration par parties pour $\frac{1}{2\pi}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)e^{-\imath nt}$, puis en utilisant la 2π-périodicité de $u(x,t)$ en temps, on obtient finalement :

$$\imath n\, C_n(x) = \frac{c}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}e^{-\imath nt}\mathrm{dt}$$

De là, par le théorème de la dérivation sous le signe intégrale, applicable car $(x,t)\mapsto\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ existe et est continue sur $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
C_n''(x) &= \frac{d^2}{dx^2}(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x,t)e^{-\imath nt}\mathrm{dt}) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}e^{-\imath nt}\mathrm{dt}
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient cette équation différentielle :

$$C_n''(x) = \frac{\imath n}{c} C_n(x)$$

$$C_n''(x) = \lambda_n^2 C_n(x) \tag{3}$$

où l'on a posé :

$$\lambda_n = \alpha_n + \imath sgn(n)\alpha_n \text{ et } \alpha_n = \sqrt{\frac{|n|}{2c}}$$

La solution de cette équation différentielle du second ordre est alors :

$$C_n(x) = A_n(x_0)e^{\lambda_n(x-x_0)} + B_n(x_0)e^{-\lambda_n(x-x_0)}$$

pour un $x_0 > 0$ fixé et pour $x \geqslant x_0$ tel que $C_n(x_0) = A_n(x_0) + B_n(x_0)$. On "choisit" alors de prendre $A_n(x_0) = 0$, dans la mesure où l'étude porte sur l'évolution de la température u en fonction du t et de x, et que des solutions divergentes en espace ne conviennent pas, puisque la fonction u est bornée pour tout $t \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$. On obtient ainsi :

$$\forall x \geqslant x_0 > 0,\ C_n(x) = C_n(x_0)e^{-\lambda_n(x-x_0)}$$

De plus, on sait que :

$$C_n(x_0) \underset{x_0 \to 0}{\longrightarrow} \widehat{f}(n)$$

Donc il vient que :

$$\forall x > 0,\ C_n(x) = \widehat{f}(n)e^{-\lambda_n x}$$

On obtient l'expression explicite de $u(x,t)$:

$$\forall x \geqslant 0,\ t \geqslant 0,\ u(x,t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{-\alpha_n x}e^{\imath nt - \imath sgn(n)\alpha_n x} \tag{4}$$

Étape de synthèse

Nous vérifions que la fonction u déterminée dans le paragraphe précédent vérifie effectivement les propriétés du théorème PCB.

a) $t \mapsto u(x,t)$ est effectivement 2π-périodique en temps.

b) Pour montrer l'existence et la continuité de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$, on invoque les théorèmes relatifs à la dérivabilité de la somme d'une série et le fait que f étant supposée C^2, f' vérifie la proposition rappelée précédemment sur les séries de Fourier : la série de Fourier de f' converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et sa somme est f', et on a :

$$\widehat{f''}(n) = \imath n\widehat{f'}(n) = -n^2\widehat{f}(n)$$

c) Cette propriété se vérifie aisément grâce à l'expression trouvée de $u(x,t)$. Il convient simplement de rappeler les hypothèses nécessaires à l'application des théorèmes sur la dérivabilité de la somme d'une série.

d) Montrons que $u(x,t)$ converge uniformément vers $f(t)$ quand x tend vers 0. Soit $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned} u(x,t) - f(t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{\imath nt}(e^{-\alpha_n x - \imath sgn(n)\alpha_n x} - 1) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{\imath nt}(h(1) - h(0)) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} h :& [0,1] \to \mathbb{C} \\ & s \mapsto e^{-\alpha_n s x - \imath sgn(n) \alpha_n s x} \end{aligned}$$

De plus $|h'|$ est majorée sur $[0,1]$ par $x\sqrt{\frac{|n|}{c}}$ indépendante de s. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $x \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$\begin{aligned} |u(x,t) - f(t)| &\leqslant \frac{x}{\sqrt{c}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| \sqrt{|n|} \\ &\leqslant \frac{x}{\sqrt{c}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| \sqrt{|n|} \frac{|n|^{3/2}}{|n|^{3/2}} \\ &\leqslant \frac{x}{\sqrt{c}} (\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^3 \widehat{f}(n)^2)^{1/2} (\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2})^{1/2} \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz. La série $(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2})^{1/2}$ est bien une série convergente (vers $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$), donc une constante. Il reste alors à montrer que la famille de terme général $|n|^3 \widehat{f}(n)^2$ est sommable. Pour cela, on utilise l'égalité de Perceval à la fonction f'' de classe C^0 et 2π-périodique :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f''}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f''(t)|^2 \mathrm{d}t < +\infty$$

D'après un résultat précédent, on sait que $|\widehat{f''}(n)| = |n^2 \widehat{f}(n)|$. Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^3 \widehat{f}(n)^2 &\leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n^2 \widehat{f}(n)|^2 \\ &\leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f''}(n)|^2 \\ &< \infty \end{aligned}$$

Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^+,\ |u(x,t) - f(t)| \leqslant \lambda x$$

On en déduit que u converge uniformément vers f en temps quand x tend vers 0.

III Discrétisation du problème

III.1 Présentation de la méthode des différences finies

La méthode des différences finies permet d'approcher les dérivées partielles d'une fonction à l'aide d'opérateurs discrets de dérivations. En effet, prenons f une fonction de classe C^3 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ quelconque.

Soit $a \in I$.

La formule de Taylor-Young donne alors :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + O(h^3)$$

$$f(a-h) = f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + O(h^3)$$

En combinant les deux égalités, il vient :

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}+O(h^2) \\ f''(a) &= \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}+O(h) \end{aligned}$$

Il existe d'autres approximations de f' mais elles sont en $O(h)$ quand celle-ci est en $O(h^2)$. Pour des fonctions de deux ou trois variables, le principe reste exactement le même. Par exemple si u est une fonction des variables t, x et y, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{u(x+\Delta x,y,t)-u(x-\Delta x,y,t)}{2\Delta x}+O(\Delta x^2) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{u(x+\Delta x,y,t)+u(x-\Delta x,y,t)-2u(x,y,t)}{\Delta x^2}+O(\Delta x) \end{aligned}$$

Il en est évidemment de même pour les dérivées partielles en t ou y. Ensuite,il s'agit de définir un maillage, c'est à dire de choisir un pas pour les variables x, y et t : on définit ainsi une subdivision à pas constant du segment représentant les valeurs pouvant être prises par x,puis par y. L'approche pour t est légèrement différente puisque t représente le temps, nécessairement croissant : on se contente de choisir une valeur pour Δt (nous verrons que cette valeur doit parfois remplir certaines conditions liées à la stabilité du schéma) et nous notons alors t_k pour le temps $t_0+k\Delta t$. On notera dans la suite u_i^n pour $u(x_i,t_n)$ et $u_{i,j}^n$ pour $u(x_i,y_j,t_n)$.

Schémas implicite et explicite

Schéma explicite

Dans un schéma dit explicite, aucun système d'équations n'est à résoudre, c'est à dire qu'il n'y a pas d'inversion de matrice à effectuer : le passage du temps t_k au temps t_{k+1} se fait par le biais d'un calcul direct. Pour cela, on peut par exemple approximer une dérivée partielle de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_n) &= \frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t_n) &= \frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

Notre équation de la chaleur à une dimension devient alors :

$$\begin{cases} \dfrac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{\Delta x^2}=c\dfrac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} \\ u_j^0=f(x_j) \text{ pour } j\in\{1,2..N-1\} \\ u_0^n=u_N^n=T_0 \end{cases}$$

On connaît dès lors les u_j^0, et l'on peut calculer u_j^1,... jusqu'à u_j^n. Les u_j^{n+1} se déduisent ainsi directement des u_j^n.

Schéma implicite

Le schéma explicite se caractérise par l'inversion de matrices qu'il nécessite pour passer du temps t_n au temps t_{n+1}. Par exemple, si l'on choisit pour approximation de la dérivée en t comme telle :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t_n)=\frac{u_j^n-u_j^{n-1}}{\Delta t}$$

Dès lors, le système d'équations au temps t_n devient :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & & & \\ \beta & \alpha & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \beta & \alpha & \beta \\ & & & \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{N-2}^n \\ u_{N-1}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{u_1^{n-1}}{\Delta t} - \beta u_0^n \\ -\dfrac{u_2^{n-1}}{\Delta t} \\ \vdots \\ -\dfrac{u_{N-2}^{n-1}}{\Delta t} \\ -\dfrac{u_{N-1}^{n-1}}{\Delta t} - \beta u_0^n \end{pmatrix}$$

avec $\alpha = -\dfrac{1}{\Delta t} - \dfrac{2}{c\ \Delta x^2}$ et $\beta = \dfrac{1}{c\ \Delta x^2}$. Il s'agit donc ici d'inverser une matrice tridiagonale, pour lesquelles il existe des algorithmes spécialisés (algorithme de Thomas en $O(n)$).

Stabilité et Consistance

La discrétisation n'est efficace que si les erreurs commises par rapports aux valeurs réelles ne croissent pas pendant la procédure numérique. Il existe trois types de schémas :
- inconditionnellement stable : stable pour tout Δx et Δt choisis.
- conditionnellement stable : il existe une condition de stabilité sur Δx et Δt.
- inconditionnellement instable : résultats faux dans tous les cas, et donc à proscrire.

De plus, un schéma est dit consistant si l'erreur de troncature, notée E.T, et qui correspond à la différence entre les dérivées continues et les dérivées discrètes dans l'équation étudiée, est telle que :

$$\lim_{(\Delta x, \Delta t)\to(0,0)} \mathrm{E.T} = 0$$

Un schéma est dit alors convergent s'il est stable et consistant.

III.2 Discrétisation 1D

Pour le schéma à 1 dimension, nous avons choisi d'implémenter avec Maple le schéma implicite inconditionnellement stable évoqué ci-dessus, qui permet une précision en $(O(\Delta x), O(\Delta t))$, dont la mise en oeuvre est assez intuitive.

Le programme Maple a été réalisé en plusieurs étapes :
-d'abord une phase de construction de matrices utilisées dans le cadre du schéma.
-ensuite une procédure récursive permettant le renvoi du vecteur $U_n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{N-2}^n \\ u_{N-1}^n \end{pmatrix}$
-enfin une implémentation graphique du résultat pour une large gamme de temps.

III.3 Discrétisation 2D

Présentation du schéma

L'équation étudiée est alors :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = c\frac{\partial u}{\partial t}$$

En 2D, nous choisissons un schéma explicite conditionnellement stable, en approximant ainsi les dérivées partielles :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_j, t_n) &= \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t_n) &= \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j, t_n) &= \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2}
\end{aligned}
$$

L'évolution du sytème se traduit alors ainsi :

$$u_{i,j}^{n+1} = Au_{i,j}^n + Bu_{i+1,j}^n + Cu_{i-1,j}^n + Du_{i,j+1}^n + Eu_{i,j-1}^n$$

avec :

$$
\begin{cases}
A = 1 - \dfrac{2\Delta t}{c\ \Delta x^2} - \dfrac{2\Delta t}{c\ \Delta y^2} \\
B = \dfrac{\Delta t}{c\ \Delta x^2} \\
C = \dfrac{\Delta t}{c\ \Delta x^2} \\
D = \dfrac{\Delta t}{c\ \Delta y^2} \\
E = \dfrac{\Delta t}{c\ \Delta y^2}
\end{cases}
$$

En réalité $B = C$ et $D = E$, et puisque nous prenons $\Delta x = \Delta y$ on aura $B = C = D = E$, mais nous les différencions pour des raisons de clarté.

Forme matricielle du problème

On pose :

$$
U_n = \begin{pmatrix} u_{1,1}^n \\ u_{1,2}^n \\ \vdots \\ u_{1,J}^n \\ u_{2,1}^n \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{I-1,J}^n \\ u_{I,1}^n \\ \vdots \\ u_{I,J}^n \end{pmatrix}
$$

On peut dès lors traduire le problème sous forme matricielle :

$$U_{n+1} = MU_n + V$$

avec M une matrice-blocs de taille (I*J,I*J) :

$$
M = \begin{pmatrix}
M_c & M_d & & & \\
M_g & M_c & M_d & & \\
 & M_g & \ddots & \ddots & \\
 & & \ddots & \ddots & M_d \\
 & & & M_g & M_c
\end{pmatrix}
$$

où M_c, M_d et M_g sont les matrices suivantes :

$$M_c = \begin{pmatrix} A & D & & 0 \\ E & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & D \\ & & E & A \end{pmatrix}$$

$$M_g = \begin{pmatrix} C & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C \end{pmatrix}$$

$$M_d = \begin{pmatrix} B & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B \end{pmatrix}$$

Le vecteur V de taille I*J contient pour sa part les conditions aux bords :

$$V = \begin{pmatrix} Cu_{0,1} + Eu_{1,0} \\ Cu_{0,2} \\ \vdots \\ Cu_{0,J} + Du_{1,J+1} \\ Eu_{2,0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Du_{2,J+1} \\ Eu_{3,0} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ Du_{I-1,J+1} \\ Bu_{I+1,1} + Eu_{1,0} \\ Bu_{I+2,0} \\ \vdots \\ Bu_{I+1,J} + Du_{I,J+1} \end{pmatrix}$$

Conditions de stabilité (Admis)

La condition de stabilité de ce schéma est la suivante :

$$\frac{\Delta t}{c}\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right) \leqslant \frac{1}{2}$$

En prenant $\Delta x = \Delta y$, on obtient une condition plus restrictive que pour le schéma explicite à une dimension :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leqslant \frac{c}{4}$$