# PROBLÈMES DU $2^{nd}$ TOURNOI FRANÇAIS DES JEUNES MATHÉMATICIENNES ET MATHÉMATICIENS

14 – 16 AVRIL 2012, PALAISEAU (FRANCE)

Table des matières




**Mots clés :** 1. Théorie additive des nombres, équations diophantiennes – 2. Théorie des nombres, congruences – 3. Géometrie plane – 4. Géometrie analytique, centre de gravité – 5. Suites récurrentes, probabilités.


## Notations

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ | ensemble des nombres entiers strictement positifs |
| $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ | ensemble des nombres entiers, rationnels, complexes |
| $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ | droite réelle et plan réel |
| $a \bmod b$ | reste de la division euclidienne de $a$ par $b$ |
| $\#M$ | cardinal (nombre d'éléments) d'un ensemble $M$ |
| $\tau(n)$ | nombre de diviseurs positifs de $n$ |
| $\varphi(n)$ | fonction indicatrice d'Euler |
| $\gcd(x_1, \ldots, x_n)$ | plus grand commun diviseur des entiers $x_1, \ldots, x_n$ |

## 1. Nombres plus que parfaits

N'importe quelle fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ est dite *arithmétique*. Dans tout ce problème $n$ désigne un nombre entier strictement positif. On rappelle que $n$ est dit *parfait* s'il est égal à la somme de ses diviseurs positifs stricts (c'est-à-dire différents de $n$). Par exemple, 6, 28 et 496 sont parfaits. Euler a prouvé que si $k \geq 1$ est un nombre entier tel que $2^k - 1$ est premier, alors $n = 2^k(2^k - 1)$ est parfait.

En guise de généralisation, si $f$ une fonction arithmétique, on dira que $n$ est *$f$-parfait* si

$$f(n) = \sum_{\substack{d \mid n \\ 1 \leq d \leq n-1}} f(d).$$

Par exemple, $n$ est parfait si, et seulement, si, $n$ est $f$-parfait pour $f(n) = n$ ; $n$ est $f$-parfait pour la fonction constante $f(n) = 1$ si, et seulement si, $n$ est premier.

**1.** Soit $\tau(n)$ le nombre de diviseurs positifs de $n$ (incluant $n$).

a) Démontrer que $n$ est $\tau$-parfait si, et seulement si, $n$ est le carré d'un nombre premier.

*Date*: 23 mars 2012.

b) Trouver tous les nombres entiers $n$ qui sont $f$-parfaits lorsque $f(n) = \tau(n) - 1$. Pour le plus grand nombre possible d'entiers relatifs $k \in \mathbb{Z}$, trouver tous les nombres entiers $f$-parfaits où $f(n) = \tau(n) + k$.

**2.** Trouver tous les nombres entiers positifs $f$-parfaits, où $f(n) = \varphi(n)$ est la fonction indicatrice d'Euler.

**3.** a) Prouver que si $k \geq 1$ est un nombre entier tel que $2^{k+1} - 2k - 1$ est premier, alors $n = 2^k(2^{k+1} - 2k - 1)$ est $f$-parfait pour $f(n) = n - 1$.

b) Trouver des conditions suffisantes similaires pour qu'un entier positif soit $f$-parfait lorsque $f$ un polynôme de degré 1 (par exemple $f(n) = n - 2$ ou $f(n) = n + 1$).

**4.** Soit $f(n) = \ln(n)$. Trouver tous les nombres entiers positifs $f$-parfaits.

**5.** Soit $f(n) = (-1)^n$. Trouver tous les nombres entiers positifs $f$-parfaits. Plus généralement, étudiez le cas où $f(n) = \omega^n$, où $\omega \in \mathbb{C}$ est une racine de l'unité.

**6.** Soit $f(n) = \binom{2012}{n}$. Trouver tous les nombres entiers positifs $f$-parfaits. Étudiez le cas plus général où 2012 est remplacé par un nombre entier strictement positif $c$.

**7.** Trouver des conditions nécessaires et/ou suffisantes pour qu'un entier positif soit $f$-parfait pour d'autres fonctions arithmétiques $f$.

**8.** Un couple d'entiers strictement positifs $(m, n)$ est dit *amical* si

$$n = \sum_{\substack{d|m \\ 1 \leq d \leq m-1}} d \quad \text{and} \quad m = \sum_{\substack{d|n \\ 1 \leq d \leq n-1}} d.$$

Par exemple, $(220, 284)$ est amical. Si $f$ est une fonction arithmétique, proposer une définition raisonnable pour qu'un couple d'entiers strictement positifs $(m, n)$ soit $f$-amical. Pour diverses fonctions arithmétiques $f$, trouver les couples d'entiers strictement positifs $(m, n)$ $f$-amicaux ou bien démontrer qu'il n'en existe pas.

## 2. **La formule des résidus**

On note $T_k = \frac{k(k+1)}{2}$ le $k^{\text{ème}}$ nombre triangulaire, où $k \in \mathbb{N}^*$. Pour chaque entier strictement positif $n$, soit $u_n$ le nombre différents de termes $(T_k \mod n)_{k\geq 1}$.

**1.** Trouver une formule pour $u_n$ lorsque $n$ est une puissance de 2.

**2.** Trouver une formule pour $u_n$ lorsque $n$ est la puissance d'un nombre premier.

**3.** Trouver une formule pour $u_n$ dans le cas général.

**4.** Soit $P(x)$ un polynôme à coefficients rationnels tels que $P(k)$ soit entier pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Trouver le nombre de résidus différents modulo $n$ dans la suite $(P(k))_{k\geq 1}$, où $n$ est une entier strictement positif.

**5.** Proposer et étudier des questions similaires.

## 3. **Triangles isocèles**

On considère un triangle $\Delta ABC$ dont les longueurs des côtés sont $a, b, c$ et les longueurs des médianes sont $m_a, m_b, m_c$ (voir Figure 1). Il est connu que $m_a = m_b$ si, et seulement si, $a = b$ (autrement dit $ABC$ est isocèle).

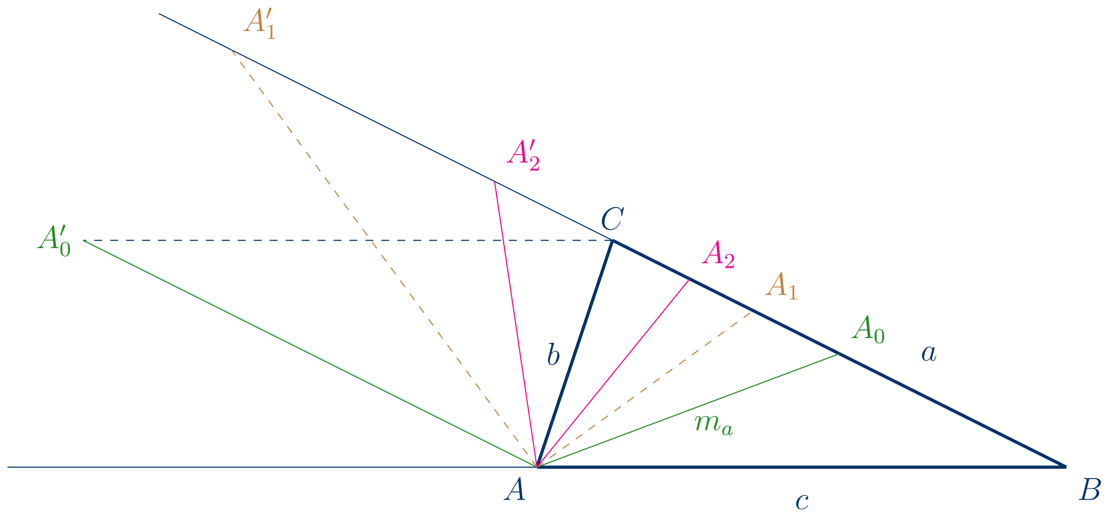



FIGURE 1. Un triangle $ABC$ avec une médiane $AA_0$, une bissectrice intérieure $AA_1$, une symédiane $AA_2$, une ex-médiane $AA'_0$, une bissectrice extérieure $AA'_1$ et une ex-symédiane $AA'_2$.

**1.** Montrer que deux bissectrices intérieures d'un triangle ont même longueur si, et seulement si, le triangle est isocèle.

**2.** La *symédiane* passant par un sommet donné d'un triangle est le symétrique de la médiane par rapport à la bissectrice intérieure issues de ce sommet. Montrer que deux symédianes d'un triangle ont même longueur si, et seulement si, le triangle est isocèle.

**3.** Est-il vrai que deux bissectrices extérieures d'un triangle sont égales si, et seulement si, le triangle est isocèle ?

**4.** Une *ex-médiane* est par définition parallèle à un côté d'un triangle et passe par le sommet opposé. La *ex-symédiane* passant par un sommet d'un triangle est le symétrique de l'ex-médiane par rapport à la bissectrice extérieure passants par ce sommet.

Est-il vrai que deux ex-symédianes d'un triangle ont même longueur si, et seulement si, le triangle est isocèle ?

Soit $n \neq 0$ un nombre réel. Un *n-segment interne* (*externe*) d'un triangle est un segment passant par un sommet qui coupe intérieurement (extérieurement) le côté opposé dans les proportions des puissances $n$-ièmes des côtés adjacents. Plus précisément, les segments $[AA_n]$ et $[AA'_n]$ sont respectivement des $n$-segments internes et externes en $A$ si on a $\frac{BA_n}{A_nC} = \frac{c^n}{b^n}$ et $\frac{BA'_n}{A'_nC} = \frac{c^n}{b^n}$.

**5.** Vérifiez que les bissectrices intérieures et symédianes sont respectivement des 1-segments et 2-segments internes d'un triangle. Vérifiez également que les bissectrices extérieures et les ex-symédianes sont respectivement les 1-segments et 2-segments extérieures d'un triangle.

**6.** Est-il vrai que deux $n$-segments internes d'un triangle sont égaux si, et seulement si, le triangle est isocèle ?

**7.** Est-il vrai que deux $n$-segments externes d'un triangle sont égaux si, et seulement si, le triangle est isocèle ?

**8.** Proposez et étudiez des directions de recherche additionnelles.

## 4. Polygônes stables

Soit $n \geq 3$ un entier, et soit $P_n$ l'ensemble des sommets d'un polygône régulier à $n$ sommets. Un sous-ensemble $A \subseteq P_n$ est dit *stable* si le centre de gravité des points appartenant à $A$ coincide avec le centre du polygône régulier.

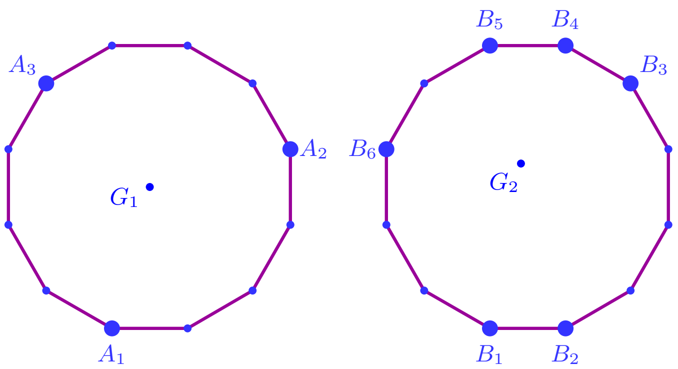



FIGURE 2. Le sous-ensemble $A = \{A_1, A_2, A_3\}$ de $P_{12}$ est stable, mais le sous-ensemble $B = \{B_1, \ldots, B_6\}$ ne l'est pas.

**1.** Lorsque $n$ est premier, trouver le nombre de sous-ensembles stables $A \subseteq P_n$ et les décrire.

**2.** Même question lorsque $n$ est le produit de deux nombres premiers différents.

**3.** Même question lorsque $n$ est une puissance d'un nombre premier.

**4.** Étudier le problème pour un entier $n$ quelconque.

**5.** Proposez et étudiez des directions de recherche additionnelles.

## 5. Suites récurrentes

**1.** Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels telle que pour tout entier $n \geq 2$ :

$$u_{n+1} = \frac{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}{n}.$$

Étudier les propriétés de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ en fonction de $u_1$ et $u_2$. Par exemple la suite est-elle monotone, bornée, convergente ... ?

**2.** Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels tels que pour tout entier $n \geq 2$ :

$$u_{n+1} = \frac{u_1 u_n + u_2 u_{n-1} + \cdots + u_{n-1} u_2 + u_n u_1}{n}.$$

Étudier les propriétés de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ en fonction de $u_1$ et $u_2$.

**3.** Soient $u_1$ et $u_2$ deux nombres réels. On construit une suite aléatoire $(u_n)_{n\geq 1}$ de la manière suivante. Pour chaque $n \geq 2$, si $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont déjà construits, on choisit une permutation $\sigma$ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ avec probabilité $1/n!$ et on pose :

$$u_{n+1} = \frac{u_1 u_{\sigma(1)} + u_2 u_{\sigma(2)} + \cdots + u_n u_{\sigma(n)}}{n}.$$

a) Étudier les propriétés de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ en fonction de $u_1$ et $u_2$.

b) Même question si $\sigma$ est une fonction aléatoire $\{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ au lieu d'une permutation.

**4.** Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombre réels telle que pour $n \geq 4$,

$$u_n = \frac{u_1 u_{n+1} + u_2 u_n + \cdots + u_n u_2 + u_{n+1} u_1}{n+1}.$$

a) Étudier les propriétés de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ en fonction de $u_1, u_2, u_3$ et $u_4$.

b) On suppose de plus que $u_1 = u_2 = u_3 = 1$. Existe-t-il une valeur $u_4$ telle que $0 \leq u_4 < 1$ et $u_n < 1$ pour tout $n \geq 1$ ?

Laboratoire de Mathématiques, Université Paris-Sud, 91400 Orsay, FRANCE
*E-mail address*: `organisateurs@tfjm.org`
*URL*: `http://www.tfjm.org/`

# Problème 1

## Nombres plus que parfaits

*Equipe Limite plus l'infini, Versailles*

## Résumé

**1.** a) On a démontré par disjonction de cas que *n* était $\tau$ -parfait si, et seulement si, *n* était le carré d'un nombre premier.
b) On a trouvé tous les nombres $n$ tels que $n = p^a$ qui sont *f*-parfaits lorsque $f(n) = \tau(n) + k, k \in \mathbb{Z}$
**2.** On a trouvé que lorsque $n$ est premier, seul 2 est *f*-parfaits, où *f*(*n*) = $\varphi$(*n*) est la fonction indicatrice d'Euler. Nous n'avons pas traité le cas des nombres non-premiers.
**3.** a) On a montré par le calcul que si *k* -1 est un nombre entier tel que 2*k*+1 − 2*k* − 1 est premier, alors *n* = 2*k* (2*k*+1 − 2*k* − 1) est *f*-parfait pour *f*(*n*) = *n* − 1.
b) On a trouvé que $n$ est de la forme $\boldsymbol{n = 2^k} \times (2^{k+1} + \frac{b}{a}2k - 1)$ , avec $\left(2^{k+1} + \frac{b}{a}2k - 1\right)$nombre premier, est une condition suffisante pour que $n$ soit f-parfait, avec $\boldsymbol{f(n) = a\,n + b}$ $(a \in \mathbb{N}^*,\ b \in \mathbb{Z}\ et\ a/b)$
**4.** On a trouvé par disjonction de cas que seuls les nombres de la forme $n = p_1 \times p_2$, avec $p_1\ et\ p_2$ premiers, sont f-parfaits, avec $f(n) = \ln(n)$.
**5**. On a trouvé par disjonction de cas que $n$ est f-parfait avec $f(n) = (-1)^n$ si et seulement si $n$ est premier et différent de 2.
**6.** On a trouvé que lorsque $n$ est premier, seul 2011 est *f*-parfaits, où *f*(*n*) = $\binom{2012}{n}$. Nous n'avons pas trouvé de formule générale pour les nombres non-premiers.

Nous n'avons pas eu le temps de traiter les questions 7 et 8.

## Question 1, a)

*Soit τ(n) le nombre de diviseurs positifs de n ( incluant n ).* ***Démontrons que n est τ-parfait si, et seulement si, n est le carré d'un nombre premier.***

Soit $d$ un diviseur de n.

**1- $\boldsymbol{\tau(1) = 1}$.**

1 n'a pas de diviseurs stricts positifs. Pour n=1, $\sum \tau(d) = 0$.
1 n'est pas τ-parfait.

**2- Si n admet au moins un diviseur strict ≠ 1 et non premier** : pour ce diviseur $\tau(d) > 2$.
Pour les autres, $\tau(d) \geq 2$.
Soit $N = \tau(n)$. On a $\sum \tau(d) \leq 1 + 2 \times (N - 2)$
Or $1 + 2 \times (N - 2) \leq N \;\Leftrightarrow N \leq 3$
Si $N$ =1 alors n=1 et 1 n'est pas f-parfait.
Si $N$ =2, n est premier, $\tau(n) = 2 \; et \; \sum \tau(d) = \tau(1) = 1$ donc p premier n'est pas f-parfait.
Si $N$ =3, $n = p^2$ (avec $p$ premier) donc n n'a pas de diviseur strict différent de 1 et non premier.
Donc $\sum \tau(d) = \tau(p^2)$

3- **Si n n'admet que des diviseurs stricts ≠ 1 premiers**, alors on a ( $p_1$ et $p_2$ premiers) :
. Soit $= p_1$ , alors $\tau(n) = 2$ et $\sum \tau(d) = \tau(1) = 1$, donc n n'est pas parfait,
. Soit $= p_1 \times p_2$ , alors $\tau(n) = 4$ et $\sum \tau(d) = \tau(1) + \tau(p_1) + \tau(p_2) = 1 + 2 + 2 = 5$ , donc n n'est pas parfait,
. Soit $= p_1^2$ , alors $\tau(n) = 3$ et $\sum \tau(d) = \tau(1) + \tau(p_1) = 1 + 2 = 3$ ,

**D'après 1, 2 et 3,$\boldsymbol{\tau(n) = \sum \tau(d) \Leftrightarrow n = p_1^2}$ ( avec $\boldsymbol{p}$ premier).**

## Question 1, b)

*Soit* $(n) = \tau(n) + k$ $(k \in \mathbb{Z})$ *.* ***Trouvons tous les nombres entiers f-parfaits.***

Dans le cas où $n = p^a$ ($p$ premier)
$\tau(n) = a + 1$ et $f(n) = k + a + 1$
Les diviseurs stricts de $n$ sont de la forme $d = p^i$ , $0 \leq i < k$
$\tau(d) = i + 1$ et $f(d) = i + 1 + k$

$$\sum \tau(d) = \sum_{i=0}^{a-1} i + 1 = \sum_{i=1}^{a} i = \frac{a(a+1)}{2}$$

$$\sum f(d) = \sum \tau(d) + an$$

(il y a $a$ diviseurs stricts)

$$f(n) = \sum f(d)$$

$$\Leftrightarrow k + a + 1 = \frac{a(a+1)}{2} + ak$$

$$\Leftrightarrow 2k + 2a + 2 = a^2 + a + 2ak$$

$$\Leftrightarrow a^2 + a(2k-1) - 2 - 2k = 0$$

$$a_1 = \frac{-2k + 1 - \sqrt{(2k-1)^2 + 8k + 8}}{2}$$

$$a_2 = \frac{-2k + 1 + \sqrt{(2k-1)^2 + 8k + 8}}{2}$$

$(a_1 \; et \; a_2 \; \in \mathbb{N})$

Si $k = 0$, solution : $n = p^2$
Si $k = -1$, solution : $n = 1 \; ou \; n = p^3$

## Question 2)

***Trouvons tous les nombres entiers positifs f-parfait, où $f(n) = \varphi(n)$ est la fonction indicatrice d'Euler.***

Par exemple, on a : $\varphi(6) = 2$

$$\sum \varphi(d) = \varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \varphi(d_3) + \cdots + \varphi(d_k)$$

$$\sum \varphi(d(6)) = \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3)$$

$$\sum \varphi(d(6)) = 1 + 1 + 2$$

$$\sum \varphi(d(6)) = 4$$

$$\varphi(6) \neq \sum \varphi(6)$$

On en déduit que 6 n'est pas f-parfait.

Par contre, $\varphi(2) = 1$ et
$\sum \varphi(d(2)) = \varphi(1) = 1 = \varphi(2)$
On en déduit que 2 est f-parfait.

**Etudions $\varphi(p)$ avec $p$ nombre premier.**

$p$ est premier avec 1, 2, … et avec $p - 1$.
On en déduit que $p$ est premier avec $p - 1$ entiers différents, $\Leftrightarrow \varphi(p) = p - 1$
Le seul diviseur strict de $p$ est 1.
Donc $\forall\, p \in \mathbb{N}$ on a $\sum \varphi(d(p)) = \varphi(1) = 1$
On résout $\varphi(p) = \sum \varphi(d(p))$
$\Leftrightarrow p - 1 = 1$
$\Leftrightarrow p = 2$

**On en déduit que 2 est le seul nombre premier f-parfait.**

**<u>PISTES</u>**

$\forall\, n \in \mathbb{N}, 1 \wedge n = 1$
On en déduit que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq 1$

**Question 3, a)**

***Prouvons que*** *si* $k \geq 1$ *est un nombre entier tel que* $2^{k+1} - 2k - 1$ *est premier,*
*alors* $\boldsymbol{n = 2^k(2^{k+1} - 2k - 1)}$ ***est f-parfait pour*** $\boldsymbol{f(n) = n - 1}$***.***

$$\begin{cases} p = 2^{k+1} - 2k - 1 \\ n = 2^k \times p \end{cases}$$

$$f(n) = n - 1$$

$$D^+(n) = \{\underbrace{1,2,2^1,2^2,2^3,\dots,2^k}_{k+1\ termes},\underbrace{p,2\times p,2^2\times p,\dots,2^k\times p}_{k+1\ termes}\}$$

$$\sum f(d) = f(1) + f(2) + f(2^2) + f(2^3) + \cdots + f\left(2^k\right) + f(p) + f(p \times 2) + \cdots + f(p \times 2^k)$$

$$\sum f(d) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^k - (k+1) + p \times \left(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{k-1}\right) - k$$

$$\sum f(d) = 1 \times \frac{1 - 2^{k+1}}{1 - 2} - (k+1) + p \times \frac{1 - 2^k}{1 - 2} - k$$

$$\sum f(d) = \frac{1 - 2^{k+1}}{-1} + p \times \frac{1 - 2^k}{-1} - 2k - 1$$

$$\sum f(d) = (2^{k+1} - 1) + p \times (2^k - 1) - 2k - 1$$

$$\sum f(d) = (2^{k+1} - 2k - 1) + p \times (2^k - 1) - 1$$

$$\sum f(d) = p \times (1 + 2^k - 1) - 1$$

$$\sum f(d) = p \times 2^k - 1$$

$$\sum f(d) = n - 1$$

$$\sum f(d) = f(n)$$

## Question 3, b)

***Soit $f : n \to an + b$. Cherchons p tel que si p premier, alors $n = 2^k \times p$ est f-parfait.***

Soit la fonction f telle que $\boldsymbol{f(n) = a\, n + b}$ $\quad (a \in \mathbb{N}^*,\ b \in \mathbb{Z}\ et\ a/b)$

$n$ est f-parfait $\Leftrightarrow f(n) = \sum f(d)$

$\Leftrightarrow a\,n + b = f(1) + f(2) + f(2^2) + \cdots + f\left(2^k\right) + f(p) + f(p \times 2) + \cdots + f(p \times 2^k)$

$\Leftrightarrow a\,p2^k + b = a \times (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k + p \times \left(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{k-1}\right)) + b \times (2k + 1)$

$\Leftrightarrow a\,p2^k + b = a \times (2^{k+1} - 1 + p \times \left(2^k - 1\right)) + b \times (2k + 1)$

$\Leftrightarrow a\,p2^k + b = a \times (2^{k+1} - 1 + p \times \left(2^{k+1} - 1\right)) + b \times (2k + 1) - a\,p2^k$

$\Leftrightarrow 2 \times a\,p2^k + b = a \times \left(2^{k+1} - 1\right)(p + 1) + 2kb + b$

$\Leftrightarrow a\,p2^{k+1} = a\,p\,2^{k+1} + a\,2^{k+1} - ap - a + 2kb$

$\Leftrightarrow ap = a\,2^{k+1} - a + 2kb$

$\Leftrightarrow p = \ 2^{k+1} + \dfrac{b}{a}2k - 1$

On en déduit que $n$ est de la forme $\boldsymbol{n = 2^k} \times (2^{k+1} + \frac{b}{a}2k - 1)$ , avec $\left(2^{k+1} + \frac{b}{a}2k - 1\right)$nombre premier, est une condition suffisante pour que $n$ soit f-parfait, avec $\boldsymbol{f(n) = a\,n + b}$ $\quad (a \in \mathbb{N}^*,\ b \in \mathbb{Z}\ et\ a/b)$

## Question 4)

***Soit $f(n) = ln(n)$. Trouvons tous les nombres entiers positifs f-parfaits.***

$$f(n) = \sum f(d)$$
$$\Leftrightarrow \ln(n) = \sum \ln (d)$$
$$\Leftrightarrow \ln(n) = \ln (\prod d)$$
$$\Leftrightarrow n = \prod d$$

$$n = \prod p_k^{a_i}$$

. Si au moins un exposant $a_i > 1$, alors les $p_k^{a_i}$ divisent $n$ donc sont inclus dans le produit des diviseurs $\prod d$, mais alors il y a d'autres diviseurs $\neq 1$.
On en déduit que $\prod d > n$.

. Si $n$ est un produit de nombres premiers, les produits de certains nombres premiers sont des diviseurs de $n$ donc les facteurs apparaissent plus d'une fois.

. La seule solution à l'équation $n = \prod p_k^{a_i}$ est donc $n = p_1 \times p_2$, avec $p_1$ $et$ $p_2$ premiers.
En effet les diviseurs stricts de $n$ sont $1, p_1, p_2$.

$$\prod d = p_1 \times p_2 = n$$

## Question 5)

*Soit $f(n) = (-1)^n$. **Trouvons tous les nombres entiers positifs f-parfaits.***

On procède par disjonction de cas.

**. Cas où $\boldsymbol{n = 1}$,** $f(n) = -1 \; et \; \sum f(d) = 0$
Donc 1 n'est pas f-parfait.

**. Soit $\boldsymbol{n}$ est pair**, d'où $n = 2n'$, $n' \in \mathbb{N}$ et $n'$ impair.
Les diviseurs impairs de $n$ sont les diviseurs de $n'$.
Les diviseurs pairs sont de la forme $2^i n'$, $1 \leq i < n$.
Soit $N'$ le nombre de diviseurs de $n'$.
Le nombre de diviseurs impairs de $n$ est N' et le nombre de diviseurs pairs est $(k-1)N' - 1$.

Donc $\sum f(d) = 1 \times N' - \big((k+1)N' - 1\big)$
$\sum f(d) = 1 - kN'$
$f(n) = 1$ car $n$ est pair.
Donc $1 = 1 - kN'$
$\Leftrightarrow N' = 0$ , ce qui est impossible.

On en déduit que si $n$ est pair, alors $n$ n'est pas f-parfait.

**. Soit $\boldsymbol{n}$ est impair :**

- si $n$ est impair et non premier, $f(n) = -1$, et les diviseurs de n sont k impairs,
  donc $\sum f(d) < -1$
  On en déduit que si $n$ est impair et non premier, alors $n$ n'est pas f-parfait.

- si $n$ est impair et premier, $f(n) = -1$,
  le seul diviseur strict de $n$ est 1,
  d'où $\sum f(d) = f(1) = -1$
  $f(n) = \sum f(d)$

  Donc un nombre premier impair, c'est-à-dire différent de 2, est f-parfait.

**On en déduit que $\boldsymbol{f(n) = \sum f(d)} \Leftrightarrow \boldsymbol{n}$ est premier et différent de 2.**
**Donc $\boldsymbol{n}$ est f-parfait si et seulement si il est premier et différent de 2.**

## Question 6)

*Soit $f(n) = \binom{2012}{n}$.* ***Trouvons tous les nombres entiers positifs f-parfaits.***

On cherche :
-soit quelques cas à énumérer
-soit une formule permettant de calculer/déterminer tous les cas.

On sait que tout nombre entier positifs admet une décomposition unique en produit de facteurs premiers. On note :

$$n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \ldots \times p_k^{a_k}$$

Soit D le nombre de diviseurs de $n$.
On a $D = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_k + 1)$

On cherche à résoudre l'équation :

$$f(n) = \sum f(d) \Leftrightarrow \binom{2012}{n} = \sum_{d/n} \binom{2012}{d}$$

$$\Leftrightarrow \binom{2012}{n} = \binom{2012}{1} + \binom{2012}{d_2} + \cdots + \binom{2012}{d_D}$$

(Somme de D termes)

On sait que $n \in [\![1,2012]\!]$
On montre que 2012 n'est pas f-parfait.
$\binom{2012}{2012} \neq \binom{2012}{1} + \binom{2012}{2} + \binom{2012}{4} + \cdots$

On peut donc dire que $n \in [\![1,2011]\!]$

**Disjonction de cas :**

**1- $\mathbf{n}$ est premier**

Alors $\sum f(d) = f(1) = \binom{2012}{1}$
On résout $f(n) = \sum f(d)$

$$\Leftrightarrow f(n) = \binom{2012}{1}$$

$$\Leftrightarrow \binom{2012}{n} = \binom{2012}{1}$$

$$\Leftrightarrow n = 1 \; ou \; n = 2011$$

Or $n$ est premier, donc $n = 2011$.
**On en déduit que le seul nombre premier f-parfait est 2011.**

**2- $\boldsymbol{n}$ n'est pas premier**

Alors $= p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \ldots \times p_k^{a_k}$ , avec $p_1^{a_1} \geq 2$

Donc $2012 > n \geq p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \ldots \times p_k^{a_k} \geq 2 \times p_k$

$\Leftrightarrow\ 2 \times p_k < 2012$

$\Leftrightarrow\ p_k < 1006$

Or $p_k$ est premier, donc $p_k \leq 997 < 1006$.

**PISTES**

Utiliser la formule :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Ou

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

**On cherche à résoudre algébriquement l'équation :**

$$f(n) = \sum f(d)$$

$$\Leftrightarrow \binom{2012}{n} = \binom{2012}{1} + \binom{2012}{d_2} + \cdots + \binom{2012}{d_k}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{2012!}{n!\,(2012-n)!} = 2012! \times \left[\frac{1}{d_1!\,(2012-d_1)!} + \frac{1}{d_2!\,(2012-d_2)!} + \cdots + \frac{1}{d_k!\,(2012-d_k)!}\right]$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{n!\,(2012-n)!} = \frac{\prod_{p=2}^{k}\left[d_p!\,(2012-d_p)!\right] + d_1(2012-d_1) \times \prod_{p=3}^{k}\left[d_p!\,(2012-d_p)!\right] + \prod_{p=1}^{k-1}\left[d_p!\,(2012-d_p)!\right]}{\prod_{p=1}^{k}\left[d_p!\,(2012-d_p)!\right]}$$

$$\Leftrightarrow\ n!\,(2012-n)! \times [A] = \prod_{p=1}^{k}\left[d_p!\,(2012-d_p)!\right]$$

$$\Leftrightarrow 2011! = (2012-n)! \times \sum_{dk}\left[\prod_{dk+1}^{n} k \times \prod_{2013-dk}^{2011} k\right]$$

# Problème 2

## La formule des résidus

*Equipe Limite plus l'infini, Versailles*

## Résumé

**1.** On a démontré par récurrence que si $n$ est une puissance de 2, alors $U_n = n$.
2. Nous avons étudié le cas où $n$ est une puissance de 3, sans toutefois parvenir à trouver une formule, et nous avons tenté d'étendre nos recherches à toute puissance d'un nombre premier.

Nous n'avons pas eu le temps de traiter les autres questions.

## Question 1 )

On observe que$\forall\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leq r < n\ \ et\ \ 1 \leq U_n \leq n$

**Démontrons par récurrence que** $\forall\ \boldsymbol{n = 2^m},\ \boldsymbol{U_n = n}$

1. **Initialisation**

Montrons que pour $n = 2^1,\ U_n = n$

Considérons les trois premiers nombres triangulaires.

$T_1 = 1, d'où\ T_1 \equiv 1\ [2]$

$T_2 = 3, d'où\ T_2 \equiv 1\ [2]$

$T_3 = 6, d'où\ T_3 \equiv 0\ [2]$

On observe que le reste de la division euclidienne de $T_k$par 2 prend les valeurs 0 et 1. On en déduit que $U_2 = 2$. Donc $P_0$ est vérifiée.

2. **Hérédité**

Supposons pour n fixé $(n = 2^m)\ \ que\ U_n = n$ .

Il existe donc $T_k$tel que $T_k \equiv r\ [2^m]$

On peut ainsi trouver $2^m$ $T_k$ différents tels que le reste de la division euclidienne de $T_k$par $2^m$ prend toutes les valeurs des entiers compris entre 0 et $(2^m - 1)$.

$T_k$ vérifie l'équation suivante :

$T_k = 2^m \times k' + r,$ et on a $T_k \equiv r\ [2^m]$

On traite alors 2 cas différents :

- Si $k'$ est pair, alors

$T_k = 2^m \times \frac{k\prime}{2} + r,$ avec $\frac{k\prime}{2} \in \mathbb{N}\ et\ 0 \leq r < 2^m < 2^{m+1}$

On en déduit que $T_k \equiv r\ [2^{m+1}]$

- Si $k'$ est impair, alors

$T_k = 2^{m+1} \times (k' - 1 + 1) + r$

$$T_k = \frac{2^{m+1} \times (k' - 1)}{2} + 2^m + r$$

$T_k = 2^{m+1} \times \frac{(k'-1)}{2} + 2^m + r$ , avec $\frac{(k'-1)}{2} \in \mathbb{N}\ et\ r + 2^m < 2^m + 2^m$
$\Leftrightarrow\ r + 2^m < 2^{m+1}$

On en déduit que $T_k \equiv 2^m + r\ [2^{m+1}]$

En passant de $2^m$ à $2^{m+1}$, on double l'intervalle d'étude ( en effet, $2^{m+1} = 2^m \times 2$ )

Cependant on vient de monter que pour chaque $T_k$, on a un reste ( $r$ ) au rang n, et deux restes ( $r$ et $2^m + r$ ) on rang n+1, ce qui montre que $r$ prend toutes les valeurs de 0 à $(2^{m+1} - 1)$ modulo $2^{m+1}$.

Si on montre que $k'$ et $k''$ pair et impair existent.

Il reste maintenant à démontrer que s'il existe $T_k$ vérifiant l'équation suivante :

$T_k = 2^m \times k' + r$, avec $k'$pair, alors il existe $k'' \in \mathbb{N}$ tel que $T_k = 2^m \times k'' + r$ .

Et inversement si $k'$est impair.

$$T_{k+2n} = \frac{(k+2n)(k+2n+1)}{2}$$

$$T_{k+2n} = \frac{k^2 + 2nk + k + 2kn + 2n^2 + 2n}{2}$$

$$T_{k+2n} = \frac{k^2 + k}{2} + \frac{n \times (4k + 2n + 2)}{2}$$

$$T_{k+2n} = T_k + n \times (2k + n + 1)$$

Or on a $T_k \equiv r\ [n]$

Et $n \equiv 0\ [n]$

Donc par somme $T_{k+2n} \equiv T_k\ [n]$

Or $T_{k+2n} = T_k + n \times (2k + n + 1)$

Et $T_k = 2^m \times k' + r$

D'où $T_{k+2n} = 2^m \times k' + r + 2^m \times (2k + 2^m + 1)$

$T_{k+2n} = 2^m \times (k' + 2k + 2^m + 1) + r$

On a donc $(k' + 2k + 2^m + 1) = k''$

**Si $k'$ est pair, alors $k''$ est impair, et si $k'$ est impair, alors $k''$ est pair.**

Ce qui nous permet de conclure que si la propriété est vérifiée au rang n, alors elle est vérifiée au rang n+1.

### 3. Conclusion

D'après 1 et 2, on a démontré par récurrence que $\forall\, \boldsymbol{n = 2^m},\ \boldsymbol{U_n = n}$.

## Question 2 )

***Etudions $U_n$ pour $n = p^k$ avec p premier et $k \in \mathbb{N}$.***

**On étudie tout d'abord le cas où $p = 3$.**

*On cherche les différents restes des divisions euclidiennes de $T_k$ par 3.*
*On procèdera par disjonction de cas.*

- $\boldsymbol{k \equiv 0\ [3]}$

$k + 1 \equiv 1\ [3]$
$k(k+1) \equiv 0\ [3]$
$k(k+1) \times \frac{1}{2} \equiv 0\ [3]$
$T_k \equiv 0\ [3]$

- $\boldsymbol{k \equiv 1\ [3]}$

$k + 1 \equiv 2\ [3]$
$k(k+1) \equiv 2[3]$
$k(k+1) \times \frac{1}{2} \equiv 1\ [3]$
$T_k \equiv 1[3]$

- $\boldsymbol{k \equiv 2\ [3]}$

$k + 1 \equiv 0\ [3]$
$k(k+1) \equiv 0\ [3]$
$k(k+1) \times \frac{1}{2} \equiv 0\ [3]$
$T_k \equiv 0\ [3]$

$\Rightarrow U_3 = 3$

On cherche à se baser sur les congruences modulo 3 pour en déduire le reste des divisions euclidiennes des différents $T_k$ par $3^n$.

On effectue avec un tableur le calcul des premiers rang de la suite $(U_n)$.
On émet l'hypothèse suivante :

$U_{p^n} = \frac{p^n}{p} + m = p^{n-1} + m$
$m = p\ x + 1$
$x = ?$

# Problème 3

## Triangles isocèles

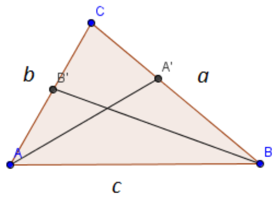
*Equipe Limite plus l'infini, Versailles*

## Résumé

**1.** On a montré que deux bissectrices intérieures d'un triangle ont même longueur si, et seulement si, le triangle est isocèle.
Nous n'avons pas eu le temps de traiter les autres questions.

## Question 1)

***Montrons que deux bissectrices intérieures d’un triangle ont même longueur si, et seulement si, le triangle est isocèle.***




Formule de la longueur de la bissectrice intérieure :

$$AA' = \frac{2\,b\,c\,cos\left(\frac{A}{2}\right)}{b+c}$$

$$BB' = \frac{2\,a\,c\,cos\left(\frac{B}{2}\right)}{a+c}$$

$$AA' = BB' \Leftrightarrow \frac{2\,b\,c\,cos\left(\frac{A}{2}\right)}{b+c} = \frac{2\,a\,c\,cos\left(\frac{B}{2}\right)}{a+c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b\ cos\left(\frac{A}{2}\right)}{b+c} = \frac{a\,cos\left(\frac{B}{2}\right)}{a+c} \qquad (1)$$

$0 \le A < \pi$

$0 \le \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2}$

$cos\left(\frac{A}{2}\right) > 0$

De même, $cos\left(\frac{B}{2}\right) > 0$

D’après la formule des demis-angles : ($s$ est le demi-périmètre)

$$cos\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \qquad et \qquad cos\left(\frac{B}{2}\right) = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$$

Donc (1) $\Leftrightarrow\ b^2\frac{s(s-a)}{bc}(a+c)^2 = a^2\frac{s(s-b)}{ac}(b+c)^2$

( On peut élever au carré car les deux membres sont positifs)

$\Leftrightarrow b(a^2+c^2+2\,a\,c)(s-a) = a(b^2+c^2+2\,b\,c)(s-b)$

$\left[s = \dfrac{a+b+c}{2}\ donc\ \ (s-a) = \dfrac{b+c-a}{2}\right]$

$\Leftrightarrow (b+c-a)(\,a^2+c^2+2\,a\,c)b = a(a+c-b)(\,b^2+c^2+2\,b\,c)$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow a^2\,b^2 + b^2\,c^2 + 2a\,b^2c + b\,c\,a^2 + b\,c^3 + 2\,a\,b\,c^2 - b\,a^3 - a\,b\,c^2 - 2\,a^2\,b\,c \\ = a^2\,b^2 + a^2\,c^2 + 2\,a^2b\,c + a\,c\,b^2 + a\,c^3 + 2\,a\,b\,c^2 - a\,b^3 - a\,b\,c^2 - 2\,a\,b^2\,c\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow a^2\,c^2 + a\,c^3 - a\,b^3 - b^2\,c^2 - 3\,a\,b^2\,c - b\,c^3 + b\,a^3 + 3\,a^2b\,c = 0$

$\Leftrightarrow\ c^3(a-b) + c^2(a-b)(a+b) + 3\,a\,b\,c(a-b) + a\,b\,(a-b)(a+b) = 0$

$\Leftrightarrow\ (a-b)(c^3 + c^2(a+b) + 3\,a\,b\,c + a\,b\,(a+b)) = 0$

Or $(c^3 + c^2(a+b) + 3\,a\,b\,c + a\,b\,(a+b)) > 0$

On en déduit que (1) $\Leftrightarrow a-b=0\ \Leftrightarrow a=b$

$\Leftrightarrow$ $ABC$ est isocèle en $C$.

**On a bien montré que deux bissectrices intérieures d’un triangle ont même longueur si, et seulement si, le triangle est isocèle.**

# Problème 4

## Polygones stables

*Equipe Limite plus l'infini, Versailles*

## Résumé

**1.** Lorsque *n* est premier, nous avons trouvé que l'ensemble vide et l'ensemble des sommets du polygone sous les 2 uniques sous-ensembles stables de $P_n$.
**2.** A l'aide d'étude de cas précis, nous avons prouvé que lorsque $n = a \times b$ avec $a$ et $b$ premiers différents, il existe $2^a + 2^b - 2$ sous-ensembles stables de $P_n$.
**3.** En nous appuyant sur un raisonnement semblable, nous avons montré que pour tout $n = p^k$, avec p nombre premier et $k \in \mathbb{N}$, il existe $2^{(p^{(n-1)})}$ sous-ensembles stables de $P_n$.
**4.** Nous avons étudié différentes pistes du problème dans un cas quelconque, en s'appuyant notamment sur des cas particulier. Nous n'avons cependant pas trouvé de formule dans un cas général.
**5.** Nous nous sommes proposés d'étudier le problème en trois dimensions, et de dénombrer les sous-ensembles stables pour les cinq polyèdres convexes.

## Question 1 )

*Lorsque n est premier, trouvons le nombre de sous-ensembles stables $A \subseteq P_n$ et décrivons les.*

Soit f la fonction qui à n associe le nombre de sous-ensembles stables $A \subseteq P_n$ , dans un polygone régulier à n sommets. Par exemple, on a f(3)=2 , f(5)=2 , f(7)=2, …

On cherche à monter que pour tout p premier, on a f(p)=2 .

**Montrons qu'il existe au moins deux sous-ensembles stables $A \subseteq P_n$ lorsque n = p.**

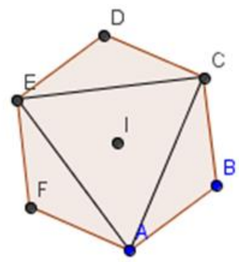
On projette un polygone régulier à p sommets dans un repère tel que l'origine de ce repère coïncide avec le centre de gravité du polygone.
Si $A_0 = \{\emptyset\}$ , alors A est stable, car on peut admettre que tout point est centre de gravité de l'ensemble vide, donc en particulier avec O.
On en déduit que $A_0$ est un sous ensemble stable de $P_p$
Si $= \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$ , alors A est stable, car son centre de gravité coïncide avec le centre de tout polygone régulier.

**On en déduit qu'il existe au moins deux sous-ensembles stables $A \subseteq P_n$ lorsque n = p.**

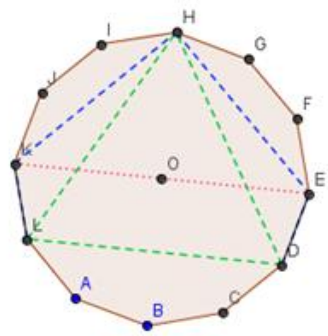
**Montrons qu'il n'existe pas d'autres sous-ensembles stables que les deux observés précédemment.**

Il existe deux configurations différentes pour qu'un sous-ensemble à k points soit stable :

- Soit l'ensemble des k points forme les k sommets d'un polygone régulier, auquel cas on a k/n, (par exemple un triangle dans un hexagone, voir figure ci-contre)




- Soit l'ensemble des k points ne forme pas un polygone régulier, alors on a k=a+b, avec a/n, b/n et l'ensemble des a (respectivement b) points forme les a (respectivement b) sommets d'un polygone régulier. (On ne le prouve que partiellement, mais ce constat s'appuie sur la logique).




Dans le dodécagone (12 sommets) ci-contre, on peut former un sous-ensemble stable $A = \{D, E, H, K, L\}$ (qui forme donc un polygone irrégulier à 5 sommets) en « combinant » les sommets de deux polygones réguliers $A_1 = \{D, H, L\}$ (en vert) et $A_2 = \{E, K\}$ (en rouge). On a donc 5 =2+3 avec 2/12 et 3/12.

Dans ces deux configurations, on a soit k/n, soit a/n et b/n.
Or on sait que n est premier, donc qu'il n'existe aucun $2 \leq k < n$ tel que $k/n$.

**On en déduit qu'il n'existe pas d'autres sous-ensembles stables que les deux observés précédemment.**
**<u>Ce qui nous permet de conclure que pour tout p premier, on a f(p)=2.</u>**

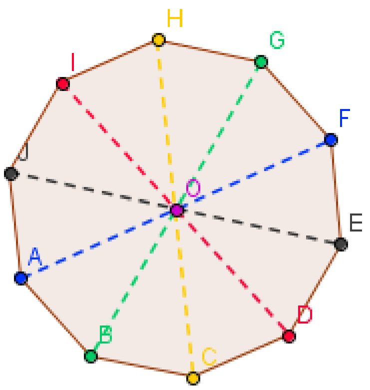
## Question 2 )

*Lorsque n est le produit de deux nombres premiers différents, trouvons le nombre de sous-ensembles stables $A \subseteq P_n$ et décrivons les.*

**On cherche à montrer que $\forall\, \boldsymbol{n = a \times b}$ , avec $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ premiers différents,**
**on a $\boldsymbol{f(n) = 2^a + 2^b - 2}$**

**Etudions le cas de $\boldsymbol{10 = 2 \times 5}$**
Soit $g^k(10)$ le nombre de sous-ensembles stables à k éléments dans $P_{10}$ .

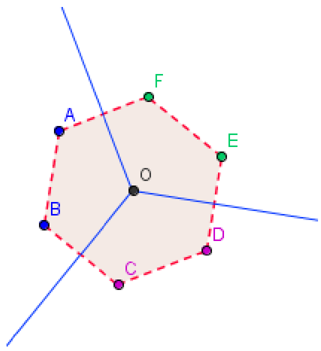
On a $g^0(10) = 1$
$g^1(10) = 0$
$g^2(10) = 5$
$g^3(10) = 0$
$g^4(10) = 10$
$g^5(10) = 2$
$g^6(10) = 10$
$g^7(10) = 0$
$g^8(10) = 5$
$g^9(10) = 0$
$g^{10}(10) = 1$
**D'où $\boldsymbol{f(10) = 34}$**




Ainsi, pour choisir un sous-ensemble à 2 éléments dans $P_{10}$ , on a 5 possibilités.

Il est logique d'affirmer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ g^0(n) = 1\ et\ g^n(n) = 1$ (voir question 1) ( 1 )
En observant les résultats obtenus avec l'étude de f(10), on remarque que les valeurs sont symétriques, ce qui nous amène à considérer les coefficients binomiaux car $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
On remarque également que $\forall\, a \in [\![1\,;\,n-1]\!]$tel que $a \wedge n = 1,\ g^a(n) = 0$ ( 2 )
On en déduit qu'il faut considérer les nombres $a$ tels que $PGCD(a, n) = d$
Alors on peut partager le polygone en $d$ parties de $\frac{n}{d}$ points successifs et choisir $\frac{a}{d}$ point parmi ces $\frac{n}{d}$ points. (On notera que $\frac{a}{d} \in \mathbb{N}$ et $\frac{n}{d} \in \mathbb{N}$)

Par exemple, peut partager un polygone à 6 sommets en 3 parties égales comportant chacune 2 sommets successifs et ainsi montrer que $g^3(6) = \binom{6/3}{3/3} = \binom{2}{1} = 2$




$\exists$ deux sous-ensembles stables à trois éléments dans cet hexagone :
$A_1 = \{A, C, E\}$
$A_2 = \{B, D, F\}$

On obtient la formule suivante : ( 3 )

$$g^a(n) = \binom{n/d}{a/d}$$

En combinant ( 1 ) , ( 2 ) , et ( 3 ), on obtient la formule générale pour $n = a \times b$ :

$$f(n) = 2 + \sum_{k=1}^{a-1} \binom{a}{k} + \sum_{k=1}^{b-1} \binom{b}{k}$$

$$\Leftrightarrow \; f(n) = \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} \times 1^k \times 1^{(a-k)} + \sum_{k=0}^{b} \binom{b}{k} \times 1^k \times 1^{(b-k)} - 2$$

$$\Leftrightarrow \; f(n) = 2^a + 2^b - 2$$

**On a bien montré que pour tout $\boldsymbol{n = a \times b}$ , avec a et b premiers différents,**
**on a $\boldsymbol{f(n) = 2^a + 2^b - 2}$**

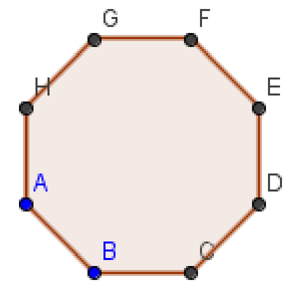
## Question 3 )

*Lorsque n est une puissance d'un nombre premier, trouvons le nombre de sous-ensembles stables $A \subseteq P_n$ et décrivons les.*

**On cherche à montrer que pour tout $n = p^k$ , avec p nombre premier et $k \in \mathbb{N}$ ,**
**on a $f(n) = 2^{(p^{(n-1)})}$**

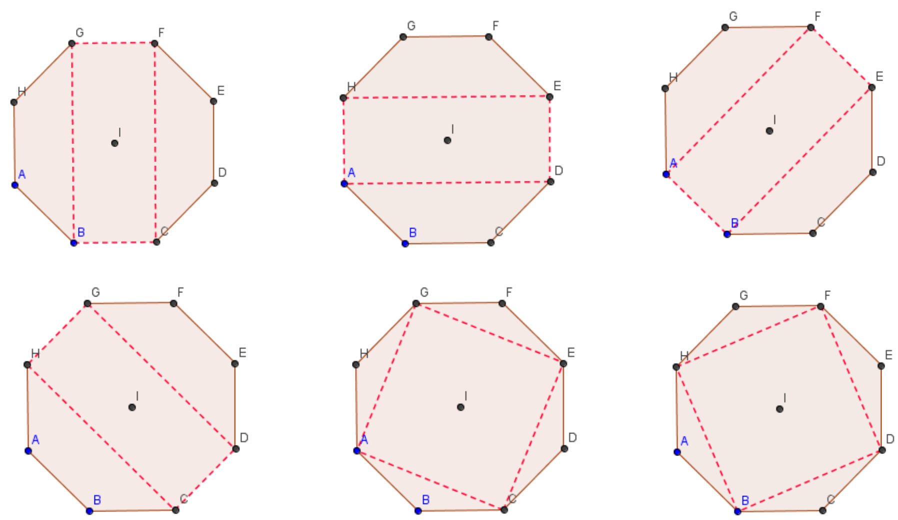
**Etudions le cas de $8 = 2^3$**

On a $g^0(8) = 1$
$g^1(8) = 0$
$g^2(8) = 4$
$g^3(8) = 0$
$g^4(8) = 6$
$g^5(8) = 0$
$g^6(8) = 4$
$g^7(8) = 0$
$g^8(8) = 1$




Un octogone, polygone régulier à 8 sommets.

Par exemple, les 6 sous-ensembles stables à 4 éléments d'un octogone sont les suivants :



**D'où $f(8) = 16$**

**Un raisonnement analogue à celui de la question 2) nous permet d'affirmer que :**

$$f(n) = \sum_{k=0}^{p^{(n-1)}} \binom{p^{(n-1)}}{k}$$

$$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{f(n) = \sum_{k=0}^{p^{(n-1)}} \binom{p^{(n-1)}}{k} \times 1^{k} \times 1^{(p^{(n-1)}-k)}}$$

$$\Leftrightarrow\ \boldsymbol{f(n) = 2^{(p^{(n-1)})}}$$

**On a bien montré que pour tout $\boldsymbol{n = p^{k}}$ , avec p nombre premier et $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$ ,**
**on a $\boldsymbol{f(n) = 2^{(p^{(n-1)})}}$**

## Question 4 )

*Pour $n$ quelconque, trouvons le nombre de sous-ensembles stables $A \subseteq P_n$ .*

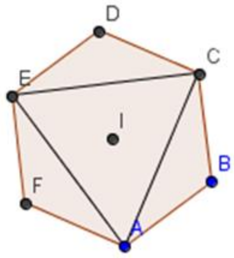
**D'après la question 1, il existe au moins deux sous-ensembles stables $\forall\, n \in \mathbb{N}$.**

Si $A_0 = \{\emptyset\}$ , alors A est stable, car on peut admettre que tout point est centre de gravité de l'ensemble vide, donc en particulier avec O.
Si $= \{A_1, A_2, \dots, A_p\}$ , alors A est stable, car son centre de gravité coïncide avec le centre de tout polygone régulier.

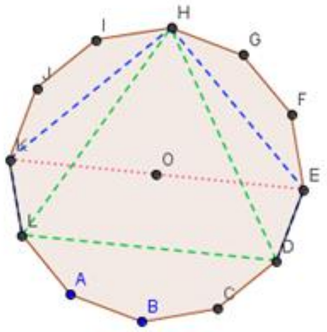
**Etudions les autres sous-ensembles stables $A \in P_n$.**

Il existe deux configurations différentes pour qu'un sous-ensemble à k points soit stable :

- Soit l'ensemble des k points forme les k sommets d'un polygone régulier, auquel cas on a k/n, (par exemple un triangle dans un hexagone, voir figure ci-contre)



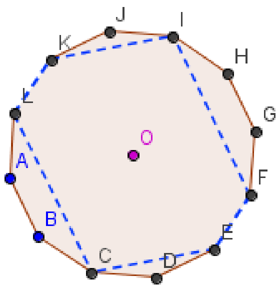

- Soit l'ensemble des k points ne forme pas un polygone régulier, alors on a k=a+b, avec a/n, b/n et l'ensemble des a (respectivement b) points forme les a (respectivement b) sommets d'un polygone régulier. (On ne le prouve que partiellement, mais ce constat s'appuie sur la logique).




Dans le dodécagone (12 sommets) ci-contre, on peut former un sous-ensemble stable $A = \{D, E, H, K, L\}$ (qui forme donc un polygone irrégulier à 5 sommets) en « combinant » les sommets de deux polygones réguliers $A_1 = \{D, H, L\}$ (en vert) et $A_2 = \{E, K\}$ (en rouge). On a donc 5 =2+3 avec 2/12 et 3/12.

**Etudions le cas de $12 = 2^2 \times 3$**

On a $g^0(12) = 1$
$g^1(12) = 0$
$g^2(12) = 6$
$g^3(12) = 4$
$g^4(12) = ?$
$g^5(12) = ?$
$g^6(12) = 20$




Exemple de sous-ensemble stable à 6 éléments dans un dodécaèdre : $A_6 = \{C, E, F, I, K, L\}$

$g^{7}(12) = ?$
$g^{8}(12) = ?$
$g^{9}(12) = 4$
$g^{10}(12) = 6$
$g^{11}(12) = 0$
$g^{12}(12) = 1$

( avec PPCD le Plus Petit Commun Diviseur $\neq 1$ )

**<u>BILAN du nombre de sous-ensembles stables $A \in P_n$ pour n particulier</u>**

| N | Décomposition en produit de facteurs premiers | F(n) |
|---|---|---|
| 3 | 1 x 3 *( n est du type n = 1 x p)* | 2 |
| 4 | 2 x 2 *( n est du type n = 1 x p x p x p x… )* | 4 |
| 5 | 1 x 5 *( n est du type n = 1 x p)* | 2 |
| 6 | 2 x 3 *( n est du type n = 1 x a x b )* | 10 |
| 7 | 1 x 7 *( n est du type n = 1 x p)* | 2 |
| 8 | 2 x 2 x 2 *( n est du type n = 1 x p x p x p x… )* | 16 |
| 9 | 3 x 3 *( n est du type n = 1 x p x p x p x… )* | 8 |
| 10 | 2 x 5 *( n est du type n = 1 x a x b )* | 34 |
| 11 | 1 x 11 *( n est du type n = 1 x p)* | 2 |
| 12 | 2 x 2 x 3 | 54 |
| 13 | 1 x 13 *( n est du type n = 1 x p)* | 2 |
| 14 | 2 x 7 *( n est du type n = 1 x a x b )* | 130 |
| 15 | 3 x 5 *( n est du type n = 1 x a x b )* | 38 |
| 16 | 2 x 2 x 2 x 2 *( n est du type n = 1 x p x p x… )* | 256 |
| 17 | 1 x 17 *( n est du type n = 1 x p)* | 2 |
| 18 | 2 x 3 x 3 | ? |
| 19 | 1 x 19 *( n est du type n = 1 x p)* | 2 |
| 20 | 2 x 2 x 5 | ? |
| 21 | 3 x 7 *( n est du type n = 1 x a x b )* | 134 |
| **P ( p premier )** | **1 x p** | **2** |
| **a x b**<br>**( a et b premiers )** | **1 x a x b** | $\mathbf{2^{a} + 2^{b} - 2}$ |
| $\boldsymbol{p^{k}}$ | **1 x p x p x p x…** | $\mathbf{2^{p^{k-1}}}$ |

## Question 5 )

*Proposons et étudions d'autres pistes de recherche.*

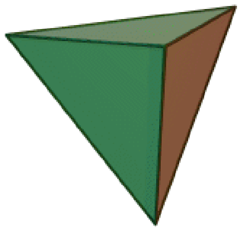
***On se propose d'étudier le problème en trois dimensions.***

On se limitera dans cette étude aux polyèdres régulier et convexes, qui sont au nombre de cinq :

- Le tétraèdre régulier, composé de 4 triangles et de 4 sommets.
- Le cube (hexaèdre régulier), composé de 6 carrés et de 8 sommets.
- L'octaèdre régulier, composé de 8 triangles et de 6 sommets.
- Le dodécaèdre régulier, composé de 12 pentagones et de 20 sommets.
- L'icosaèdre régulier, composé de 20 triangles et de 12 sommets.

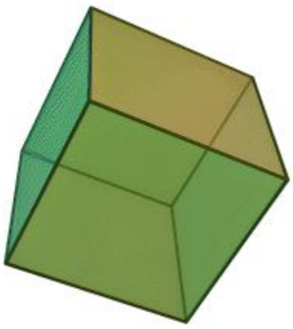
**Etudions le cas du tétraèdre régulier.**

On a $g^0(t) = 1$
$g^1(t) = 0$
$g^2(t) = 0$
$g^3(t) = 0$
$g^4(t) = 1$
**D'où $\boldsymbol{f(t) = 2}$**



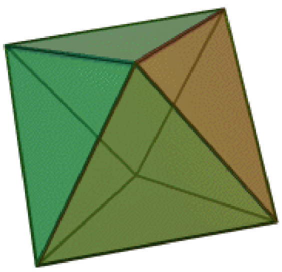
**Etudions le cas du cube (hexaèdre régulier).**

$g^0(h) = 1$
$g^1(h) = 0$
$g^2(h) = 4$
$g^3(h) = 0$
$g^4(h) = 6$
$g^5(h) = 0$
$g^6(h) = 4$
$g^7(h) = 0$
$g^8(h) = 1$
**D'où $\boldsymbol{f(h) = 16}$**



**Etudions le cas de l'octaèdre régulier.**

$g^0(o) = 1$
$g^1(o) = 0$
$g^2(o) = 3$
$g^3(o) = 0$
$g^4(o) = 3$
$g^5(o) = 0$
$g^6(o) = 1$
**D'où $\boldsymbol{f(o) = 8}$**

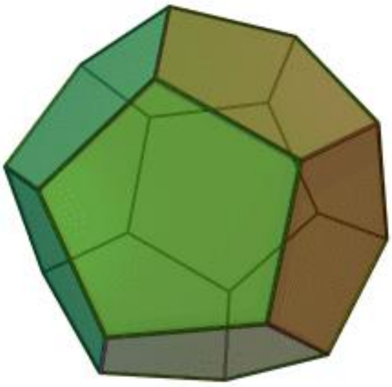


**Etudions le cas du dodécaèdre régulier.**

$g^0(d) = 1$
$g^1(d) = 0$
$g^2(d) = 10$
$g^3(d) = 0$
$g^4(d) = \binom{10}{2} = 45$
$g^5(d) = \binom{4}{1} = 4$
$g^6(d) = \binom{10}{3} = 240$
$g^7(d) = \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} = 12$
$g^8(d) = \binom{10}{4} = \cdots$

**D'où $f(d) = \cdots$**

$g^9(d) = \binom{4}{1} \times \binom{3}{2} = 12$
$g^{10}(d) = \binom{10}{5} + \binom{4}{2} = \cdots + 6$
$g^{11}(d) = 12$
$g^{12}(d) = 4$
$g^{13}(d) = 12$
$g^{14}(d) = 240$
$g^{15}(d) = 4$
$g^{16}(d) = 45$
$g^{17}(d) = 0$
$g^{18}(d) = 10$
$g^{19}(d) = 0$
$g^{20}(d) = 1$



**Etudions le cas de l'icosaèdre régulier.**

$g^0(i) = 1$
$g^1(i) = 0$
$g^2(i) = 6$
$g^3(i) = 0$
$g^4(i) = \binom{6}{2} = 15$
$g^5(i) = 0$
$g^6(i) = \binom{6}{3} = 20$
$g^7(i) = 0$
$g^8(i) = 15$
$g^9(i) = 0$
$g^{10}(i) = 6$
$g^{11}(i) = 0$
$g^{12}(i) = 1$
**D'où $f(i) = 64$**

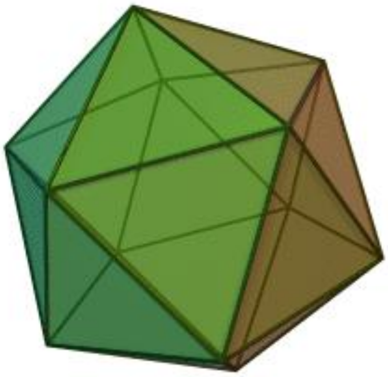


**Tableau récapitulatif des sous-ensembles stables des polyèdres réguliers :**

| Nom | Sommets | Faces | Arêtes | $f(p) =$ |
|---|---|---|---|---|
| Tétraèdre | 4 | 4 triangles | 6 | 2 |
| Hexaèdre | 8 | 6 carrés | 12 | 16 |
| Octaèdre | 6 | 8 triangles | 12 | 8 |
| Dodécaèdre | 20 | 12 pentagones | 30 | ? |
| Icosaèdre | 12 | 20 triangles | 30 | 64 |

# Problème 5

## Suites récurrentes

*Equipe Limite plus l'infini, Versailles*

## Résumé

**1.** On a étudié les propriétés de la suite $(U_n)$ en fonction de $U_1$ et $U_2$. Plusieurs récurrences nous on permit d'établir le sens de variation et la limite de la suite $(U_n)$ en fonction de $U_1$ .

**2.** On a montré par récurrence que $\forall \mathrm{~n} \in \mathbb{N},\ \mathrm{U_n} = \mathrm{U_1^n}$ . On a alors étudié la fonction : $n \rightarrow U_1^n$ . On en a déduit le sens de variation et la limite de la suite $(U_n)$ en fonction de $U_1$ .

**3.** a) En s'aidant des questions 1 et 2, on a établi le sens de variation et la limite de la suite $(U_n)$ en fonction de $U_1$, indépendants des permutation. Cependant, toutes nos hypothèses n'ont pas été prouvées.

b) En s'appuyant sur la question 3-a), on a conjecturé le sens de variation et la limite de la suite $(U_n)$ en fonction de $U_1$. Nous avons démontré par récurrence certaines de nos conjectures.

**4.** a) Nous avons défini $U_{n+1}$ en fonction de $U_n$. Par disjonction de cas et en nous appuyant sur des exemples, nous avons conjecturé les propriétés de la suite $(U_n)$ en fonction de $U_1, U_2$ et $U_3$.

b) On a supposé que$U_1 = U_2 = U_3 = 1$. Nous avons émis l'hypothèse qu'il n'existe pas de valeur de $U_4$ $(0 \leq U_4 < 1)$ telle que $\forall\, \boldsymbol{n} \geq \mathbf{4}$ *(on notera ici une légère erreur dans l'énoncé),* $U_n < 1$.

## Question 1)

Soit $(U_n)$ une suite de nombres réels telle que, $\forall\, n \geq 2$ ,

$$U_{n+1} = \frac{{U_1}^2 + {U_2}^2 + \cdots + {U_{n-1}}^2}{n-1}$$

***Etudions les propriétés de la suite $(U_n)$ en fonction de $U_1$ et de $U_2$ .***

Exemples sur quelques valeurs :

| | **0** | **0,25** | **0,5** | **0,75** | **1** | **1,5** | **2** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **U1** | 0 | 0,25 | 0,50 | 0,75 | 1 | 1,5 | 2 |
| **U2** | 0 | 0,063 | 0,250 | 0,563 | 1 | 2,25 | 4 |
| **U3** | 0 | 0,033 | 0,156 | 0,439 | 1 | 3,65625 | 10 |
| **U4** | 0 | 0,023 | 0,112 | 0,357 | 1 | 6,893554688 | 40 |
| **U5** | 0 | 0,017 | 0,087 | 0,300 | 1 | 17,05044007 | 430 |
| **U6** | 0 | 0,014 | 0,071 | 0,258 | 1 | 71,7838534 | 37324 |
| **U7** | 0 | 0,011 | 0,060 | 0,226 | 1 | 918,6401459 | 232211266 |
| **U8** | 0 | 0,010 | 0,052 | 0,201 | 1 | 121344,5084 | 7,70315E+15 |
| **U9** | 0 | 0,009 | 0,046 | 0,181 | 1 | 1840667390 | 7,41732E+30 |
| **U10** | 0 | 0,008 | 0,041 | 0,164 | 1 | 3,76451E+17 | 6,11296E+60 |

On observe les premiers termes de la suite $(\mathrm{U_n})$ pour différentes valeurs de $\mathrm{U_1}$.
On émet l'hypothèse suivante : **si $\boldsymbol{U_1 = 0}$, alors** $\forall\, \mathrm{n} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{U_n = 0}$

**Démontrons par récurrence que si $\boldsymbol{U_1 = 0}$, alors** $\forall\, \mathrm{n} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{U_n = 0}$

1. **<u>Initialisation</u>**

$U_2 = \frac{{U_1}^2}{1}$ = 0² = 0
La propriété est vérifiée pour n = 2

2. **<u>Hérédité</u>**

Supposons pour $n$ fixé ( $n \geq 2$ ) que $U_n = 0$
Montrons que $U_{n+1} = 0$

$$\boldsymbol{U_{n+1} = \frac{{U_1}^2 + {U_2}^2 + \cdots + {U_n}^2}{n}}$$

$$\boldsymbol{U_{n+1} = \frac{U_n \times (n-1) + {U_n}^2}{n}}$$

$$\boldsymbol{U_{n+1} = \frac{0 \times (n-1) + 0^2}{n}}$$

$$\boldsymbol{U_{n+1} = 0}$$

La propriété est vérifiée au rang $n + 1$

3. **<u>Conclusion</u>**

D'après 1. et 2. , on a montré par récurrence que :
Si $U_1 = 0$ , alors $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ , $U_n = 0$

**On en déduit que si $\boldsymbol{U_1 = 0}$ , alors la suite $(\boldsymbol{U_n})$ est constante**
Un raisonnement semblable nous permet de montrer que **si $\boldsymbol{U_1 = 1}$ , alors $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, , $\boldsymbol{U_n = 1}$**

*<u>Interrogeons-nous à présent sur le sens de variation et les limites de la suite Un</u>*

**Sens de variation de $(\boldsymbol{U_n})$ pour $\boldsymbol{0} < U_1 < 1$**
Démonstration par récurrence.

1. **<u>Initialisation</u>**

$0 < U_1 < 1$
La propriété est vérifiée pour n = 1

2. **<u>Hérédité</u>**

Supposons pour $n$ fixé ( $n \geq 2$ ) que $0 < U_n < 1$
Montrons que $0 < U_{n+1} < 1$
Comme montré précédemment, on a $\boldsymbol{U_{n+1}} = \frac{\boldsymbol{U_n \times (n-1) + U_n{}^2}}{\boldsymbol{n}}$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{U_{n+1} = U_n \times \left(\frac{U_n}{n} + 1 - \frac{1}{n}\right)}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $0 < U_n < 1$

$$0 < \frac{U_n}{n} < \frac{1}{n}$$
$$0 < \frac{U_n}{n} + 1 - \frac{1}{n} < \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n}$$
$$0 < \frac{U_n}{n} + 1 - \frac{1}{n} < 1$$
$$0 < U_{n+1} < U_n < 1$$

La propriété est vérifiée au rang $n+1$, de plus on a montré que $0 < U_{n+1} < U_n < 1$

3. **<u>Conclusion</u>**

D'après 1. et 2. , on a montré par récurrence que :
**Si $\boldsymbol{U_1} < 1$ , alors $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$ , $\boldsymbol{U_n} < 1$ , et la suite $(\boldsymbol{U_n})$ est strictement décroissante.**

**Démontrons par récurrence que si $\boldsymbol{U_1} > 1$ , alors $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ on a $\boldsymbol{U_n} > n$**

1. **Initialisation**

$U_1 > 1$
La propriété est vérifiée pour $n = 1$

2. **Hérédité**

Supposons pour $n$ fixé ( $n \geq 2$ ) que $U_n > n > 1$
Montrons que $U_{n+1} > n + 1$

$$U_n > n \Leftrightarrow U_n + n - 1 > 2n - 1 > 0$$
$$et\ U_n > n \Leftrightarrow \frac{U_n}{n} > 1 > 0$$
$$D'où \quad \frac{U_n \times (U_n + n - 1)}{n} > 2n - 1$$
$$et\ \forall\, n \geq 2, \qquad 2n - 1 \geq n + 1$$

On en déduit que $U_{n+1} > n + 1$ .
La propriété est vérifiée au rang $n + 1$ .

3. **Conclusion**

D'après 1. et 2. , on a montré par récurrence que :
**Si $\boldsymbol{U_1} > 1$ , alors $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$ , $\boldsymbol{U_n} > n$ .**

**Limite de $(\boldsymbol{U_n})$ lorsque $\boldsymbol{U_1} > 1$**

On sait que si $U_1 > 1$ , alors $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ , $U_n > n$ .
Or $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$
**On en déduit que $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty}} (\boldsymbol{U_n}) = +\infty$**

**Cas où $\boldsymbol{U_1}$est négatif :**
$\forall\, n \geq 2$ , tous les termes de la suite sont égaux à ceux de la suite de premier terme $(-U_1)$.

## BILAN

| $U_1$ | $U_1 = 0$ | $0 < U_1 < 1$ | $U_1 = 1$ | $U_1 > 1$ |
|---|---|---|---|---|
| Sens de variation de $(U_n)$ | Constante | Strictement décroissante sur $\mathbb{N}$ | Constante | Strictement croissante sur $\mathbb{N}$ |
| Limite de $(U_n)$ | $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n) = 0$ | | $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n) = 1$ | $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n) = +\infty$ |

## Question 2)

Soit $(U_n)$ une suite de nombres réels telle que, $\forall\, n \geq 2$ ,
$$U_{n+1} = \frac{U_1 \times U_n + U_2 \times U_{n-1} + \cdots + U_n \times U_1}{n-1}$$

***Etudions les propriétés de la suite $(U_n)$ en fonction de $U_1$ et de $U_2$ .***

On observe les premiers termes de la suite $(\mathrm{U_n})$ pour différentes valeurs de $\mathrm{U_1}$.
On émet l'hypothèse suivante : $\forall\, \mathrm{n} \in \mathbb{N},\ \mathrm{U_n} = \mathrm{U_1^n}$

**Démontrons par récurrence que $\forall\, \mathbf{n} \in \mathbb{N},\ \mathbf{U_n} = \mathbf{U_1^n}$**

1. **Initialisation**

$U_1 = U_1^1$
La propriété est vérifiée pour $n = 1$ .

2. **Hérédité**

Supposons pour n fixé que $\forall\, k \leq n\ ,\ U_k = U_1^k$
$$U_{n+1} = \frac{U_1 \times U_1^n + U_1^2 \times U_1^{n-1} + \cdots + U_1^n \times U_1^1}{n}$$

$$U_{n+1} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\left[U_1^k \times U_1^{(n-k+1)}\right]}{n}$$

$$U_{n+1} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\left[U_1^{(n+1)}\right]}{n}$$

$$U_{n+1} = \frac{n \times U_1^{n+1}}{n}$$

$$U_{n+1} = U_1^{n+1}$$

3. **Conclusion**

D'après 1. et 2. , on a montré par récurrence que $\forall\, \mathbf{n} \in \mathbb{N},\ \mathbf{U_n} = \mathbf{U_1^n}$

**On définit la fonction $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{n} \to \boldsymbol{U_1^n}$**
Par définition, le sens de variation et la limite de $(U_n)$ sont égaux au sens de variation de $f$ et à la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ .

**BILAN**

| $U_1$ | $U_1 < 0$ | $U_1 = 0$ | $0 < U_1 < 1$ | $U_1 = 1$ | $U_1 > 1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Sens de variation de $(U_n)$ | Non monotone | Constante | Strictement décroissante sur $\mathbb{N}$ | Constante | Strictement croissante sur $\mathbb{N}$ |
| Limite de $(U_n)$ | $(U_n)$ n'admet pas de limite | $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n) = 0$ | | $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n) = 1$ | $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n) = +\infty$ |

**Question 3-a)**

Soit $(U_n)$ une suite de nombres réels telle que, $\forall\, n \geq 2$ ,
$$U_{n+1} = \frac{U_1 \times U_{\sigma(1)} + U_2 \times U_{\sigma(2)} + \cdots + U_n \times U_{\sigma(n)}}{n-1}$$

***Etudions les propriétés de la suite $(U_n)$ en fonction de $U_1$ et de $U_2$ .***

# HYPOTHESES

| $U_1$ | $U_1 < 0$ | $U_1 = 0$ | $0 < U_1 < 1$ | $U_1 = 1$ | $U_1 > 1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Sens de variation de $(U_n)$ | Non monotone | Constante | Strictement décroissante sur $\mathbb{N}$ | Constante | Strictement croissante sur $\mathbb{N}$ |
| Limite de $(U_n)$ | $(U_n)$ n'admet pas de limite | $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n) = 0$ | | $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n) = 1$ | $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n) = +\infty$ |

On peut démontrer par récurrence que **si $U_1 = 0$ , alors la suite $(U_n)$ est constante**

1. **Initialisation**

$U_2 = \frac{U_1 \times U_1}{1} = \frac{0}{1}$ =0
La propriété est vérifiée pour n = 2

2. **Hérédité**

Supposons pour $n$ fixé ( $n \geq 2$ ) que $\forall\, k \leq n, U_k = 0$
Montrons que $U_{n+1} = 0$

$$\boldsymbol{U_{n+1} = \frac{U_1 \times U_{\sigma(1)} + U_2 \times U_{\sigma(2)} + \cdots + U_n \times U_{\sigma(n)}}{n}}$$
$$\boldsymbol{U_{n+1} = \frac{0 \times (U_{\sigma(1)} + U_{\sigma(2)} + \cdots + U_{\sigma(n)})}{n}}$$
$$\boldsymbol{U_{n+1} = \frac{0}{n}}$$
$$\boldsymbol{U_{n+1} = 0}$$

La propriété est vérifiée au rang $n+1$

3. **Conclusion**

D'après 1. et 2. , on a montré par récurrence que :
Si $U_1 = 0$ , alors $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ , $U_n = 0$

**On en déduit que si $\boldsymbol{U_1 = 0}$ , alors la suite ($\boldsymbol{U_n}$) est constante**

Un raisonnement semblable nous permet de montrer que **si** $\boldsymbol{U_1 = 1}$ **, alors** $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, , $\boldsymbol{U_n = 1}$

1. **<u>Initialisation</u>**

$U_2 = \frac{U_1 \times U_1}{1} = \frac{1}{1}$ =1
La propriété est vérifiée pour n = 2

2. **<u>Hérédité</u>**

Supposons pour $n$ fixé ( $n \geq 2$ ) que $\forall\, k \leq n, U_k = 0$
Montrons que $U_{n+1} = 0$

$$\boldsymbol{U_{n+1} = \frac{U_1 \times U_{\sigma(1)} + U_2 \times U_{\sigma(2)} + \cdots + U_n \times U_{\sigma(n)}}{n}}$$

$$\boldsymbol{U_{n+1} = \frac{1 \times (1 + 1 + \cdots + 1)}{n}}$$

$$\boldsymbol{U_{n+1} = \frac{1 \times n}{n}}$$

$$\boldsymbol{U_{n+1} = 1}$$

La propriété est vérifiée au rang $n + 1$

3. **<u>Conclusion</u>**

D'après 1. et 2. , on a montré par récurrence que :
Si $U_1 = 1$ , alors $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ , $U_n = 1$

**On en déduit que si $\boldsymbol{U_1 = 1}$ , alors la suite ($\boldsymbol{U_n}$) est constante.**

On étudie deux cas différents de permutations, et on montre que **si $\boldsymbol{U_1} < 0$, alors la suite $(\boldsymbol{U_n})$ n'est pas monotone.**

Par exemple,
$U_1 = -1$
$U_2 = \dfrac{U_1^2}{1} = 1$
$U_3 = \dfrac{U_1 \times U_2 + U_2 \times U_1}{2} = -1$
$U_4 = \dfrac{U_1 \times U_2 + U_2 \times U_3 + U_3 \times U_1}{3} = -\dfrac{1}{3}$

**On admet qu'elle n'a alors pas de limite.**

**On étudie des cas particuliers de permutations** :

$U_1 = 2$
$U_2 = \frac{U_1^2}{1} = 4$
$U_3 = \frac{U_1 \times U_2 + U_2 \times U_1}{2} = 8$ ou $U_3 = \frac{U_1 \times U_1 + U_2 \times U_2}{2} = 10$

**HYPOTHESE**

D’après l’étude des cas particuliers, on émet l’hypothèse qu’il existe une permutation « maximale » c’est-à-dire une permutation pour laquelle la suite (Un) admet les valeurs maximales qu’elle peut obtenir et respectivement une permutation « minimale » pour laquelle elle admet des valeurs minimale.

On émet l’hypothèse que : Pour tout n $\geq$2, et $U_1$>1 :

$$\frac{U_n(U_n + n - 1)}{n} \geq U_{n+1} \geq (U_1)^{n+1} > n + 1$$

**Exemple :**

On a $U_1 = 2, U_2 = 4, U_3 = 8$.

On prend un permutation aléatoire de $U_4$ qui n’est ni la permutation minimale définie, ni la permutation maximale définie:

Soit $U_4$=$\frac{U_1 \times U_3 + U_2 \times U_{3+U_3 \times U_1}}{3}$ =$\frac{2\times 8+8\times 4+8\times 2}{3}$ =$\frac{64}{3}$

Et d’après la formule : $\frac{U_3(U_3+3-1)}{3} \geq \frac{U_1 \times U_3 + U_2 \times U_{3+U_3 \times U_1}}{3} \geq (U_1)^{3+1} > 3 + 1$

$\frac{8(8+3-1)}{3} \geq \frac{64}{3} \geq (2)^{3+1} > 4$

$\frac{80}{3} \geq \frac{64}{3} \geq 16 > 4$

La formule est donc vérifiée dans cet exemple.

## Question 3-b)

Soit $f$ une fonction aléatoire $\{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$.
Soit $(U_n)$ une suite de nombres réels telle que, $\forall\, n \geq 2$ ,

$$U_{n+1} = \frac{U_1 \times U_{f(1)} + U_2 \times U_{f(2)} + \cdots + U_n \times U_{f(n)}}{n-1}$$

***Etudions les propriétés de la suite $(U_n)$ en fonction de $U_1$ et de $U_2$ .***

L'étude de cas particuliers nous permet d'émettre l'hypothèse suivante :

| $\boldsymbol{U_1}$ | $\boldsymbol{U_1} < 0$ | $\boldsymbol{U_1 = 0}$ | $\boldsymbol{0 <} \boldsymbol{U_1} < 1$ | $\boldsymbol{U_1 = 1}$ | $\boldsymbol{U_1} > 1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Sens de variation de $(\boldsymbol{U_n})$** | Non monotone | Constante | Strictement décroissante sur $\mathbb{N}$ | Constante | Strictement croissante sur $\mathbb{N}$ |
| **Limite de $(\boldsymbol{U_n})$** | $(U_n)$ n'admet pas de limite | $\lim_{n\to+\infty}(U_n) = 0$ | | $\lim_{n\to+\infty}(U_n) = 1$ | $\lim_{n\to+\infty}(U_n) = +\infty$ |

### 1. SI $\boldsymbol{U_1} < 0$

On étudie différents cas de permutations, et on observe que pour $U_1 < 0$, la suite $(U_n)$ n'est pas monotone. Par exemple,

$U_1 = -1$

$U_2 = \dfrac{(-1)^2}{1} = 1$

$U_3 = \dfrac{(-1)\times(-1) + 1\times(-1)}{2} = 0$

$U_4 = \dfrac{(-1)\times(-1) + 1\times 0 + 0\times 0}{3} = \dfrac{1}{3}$

Si $(U_n)$ n'est pas monotone pour une fonction aléatoire fixée, alors on ne peut pas établir de règle pour $(U_n)$ pour $U_1 < 0$.
On en déduit que $(U_{n)}$ n'admet pas de limite.

### 2. SI $\boldsymbol{U_1 = 0}$

Une récurrence immédiate (voir question 3-a)) nous permet de montrer que si $U_1 = 0$, alors $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on a $U_n = 0$.
**Donc la suite $(\boldsymbol{U_n})$ est constante et $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty}(U_n) = 0}$.**

### 3. SI $\boldsymbol{U_1 = 1}$

Une récurrence immédiate (voir question 3-a)) nous permet de montrer que si $U_1 = 1$, alors $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on a $U_n = 1$.
**Donc la suite $(\boldsymbol{U_n})$ est constante et $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty}(U_n) = 1}$.**

4. **SI $\mathbf{0} < U_{\mathbf{1}} < 1$**

- Exemple

$$U_1 = -1$$
$$U_2 = \frac{(-1)^2}{1} = 1$$
$$U_3 = \frac{(-1) \times (-1) + 1 \times (-1)}{2} = 0$$
$$U_4 = \frac{(-1) \times (-1) + 1 \times 0 + 0 \times 0}{3} = \frac{1}{3}$$

Pour cette fonction aléatoire fixée, on observe que la suite $(U_n)$ est strictement décroissante et $\lim_{n \to +\infty}(U_n) = 0$.

- Généralisation

On peut montrer par une récurrence immédiate que si $U_1 > 0$, alors $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, U_n > 0$.
On en déduit que si $U_1 > 0$, alors la suite est minorée en 0.

5. **SI $\boldsymbol{U_1} > 1$**

- Exemple

$$U_1 = 3$$
$$U_2 = \frac{3^2}{1} = 9$$
$$U_3 = \frac{3 \times 9 + 9 \times 3}{2} = 27$$
$$U_4 = \frac{3 \times 3 + 9 \times 27 + 27 \times 3}{3} = 111$$

Pour cette fonction aléatoire fixée, on observe que la suite $(U_n)$ est strictement croissante et $\lim_{n \to +\infty}(U_n) = +\infty$.

- Généralisation

On définit une permutation minimale et une permutation maximale

Soit A la plus petite permutation :
$$U_{n+1} = \frac{U_1 \times U_1 + U_2 \times U_1 + \cdots + U_n \times U_1}{n}$$
Soit B la plus grande permutation :
$$U_{n+1} = \frac{U_1 \times U_n + U_2 \times U_n + \cdots + U_n \times U_n}{n}$$

A $\Leftrightarrow U_{n+1} = \frac{U_1}{n} \times (U_1 + \cdots + U_n)$
B $\Leftrightarrow U_{n+1} = \frac{U_n}{n} \times (U_1 + \cdots + U_n)$

Or si $U_1 > 1$, $(U_n)$ est strictement croissante donc $U_1$<$U_n$ d'où A<B
On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_1$ <$U_n$

$$\frac{U_1}{n} \times (U_1 + \cdots + U_n) < \frac{U_n}{n} \times (U_1 + \cdots + U_n$$

On admet donc que toutes les autres valeurs de $(U_n)$ définies en fonction d'une fonction aléatoire f {1, 2, 3,…,n}→ $\{1, 2, 3, \dots, \mathrm{n}\}$ sont comprises entre une valeur minimale et une valeur maximale définies respectivement par A et B et $U_1 > 1$ d'où :
A≤ $U_{n+1}$ ≤B

$$\Leftrightarrow \frac{U_1}{n} \times (U_1 + \cdots + U_n) \leq U_{n+1} \leq \frac{U_n}{n} \times (U_1 + \cdots + U_n)$$

D'après la question 1 (3ème récurrence),

si $U_1 > 1$
alors $U_n > n$
donc $U_{n+1}$>n+1

**D'où** $\boldsymbol{n+1 < \frac{U_1}{n} \times (U_1 + \cdots + U_n) \leq U_{n+1} \leq \frac{U_n}{n} \times (U_1 + \cdots + U_n)}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty$

**Ce qui nous permet de conclure que si $\boldsymbol{U_1 > 1}$, alors $\boldsymbol{(U_n)}$ est strictement croissante et $\boldsymbol{\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n) = +\infty}$**

## Question 4-a)

Soit $(U_n)$ une suite de réels telle que pour tout $n \geq 4$

$$U_n = \frac{U_1 \times U_{n+1} + U_2 \times U_n + \cdots + U_{n+1} \times U_1}{n+1}$$

***Etudions les propriétés de la suite $(U_n)$ en fonction de $U_1$, $U_2$ et $U_3$.***

On cherche à définir $U_{n+1}$ en fonction de $U_n$.

$$U_n = \frac{U_1 \times U_{n+1} + U_2 \times U_n + \cdots + U_{n+1} \times U_1}{n+1}$$
$$U_n = \frac{U_{n+1} \times 2U_1}{n+1} + \frac{U_2 \times U_n + \cdots + U_n \times U_2}{n+1}$$
$$\Leftrightarrow U_{n+1} \times \frac{2U_1}{n+1} = U_n - \frac{U_2 \times U_n + \cdots + U_n \times U_2}{n+1}$$
$$\Leftrightarrow U_{n+1} = \frac{U_n(n+1) - [U_2 \times U_n + \cdots + U_n \times U_2]}{2U_1}$$

$(U_1 \neq 0)$

<u>Hypothèse :</u>

$$U_{n+1} = \frac{U_n(n+1) - (n-1) \times (U_2)^{(n-1)}}{2U_1}$$

On étudie différents cas, par exemple, $U_1 = 1$, $U_2 = 2$, $U_3 = 3$ et on trouve $U_4 = 0$.
Cette suite n'est pas monotone, elle ne nous permet pas de conclure sur une convergence ou ou divergence.

## Question 4-b)

On a supposé que$U_1 = U_2 = U_3 = 1$. En travaillant sur des exemples, nous avons émis l'hypothèse qu'il n'existe pas de valeur de $U_4$ $(0 \leq U_4 < 1)$ telle que $\forall\, \boldsymbol{n \geq 4}$, $U_n < 1$.