
TRAVAIL ENCADRÉ DE RECHERCHE
3^{ème} année de Mathématiques

**FAMILLE REMARQUABLE DE CERCLES SUR LE
TORE DE RÉVOLUTION**

Cyril FALCON & Marguerite FLAMMARION

RÉSUMÉ. Dans ce dossier, après avoir introduit les notions de géométrie projective et algébrique nécessaires, on montrera que la section d'un tore de révolution de \mathbb{R}^3 avec un de ses plans dit bitangent, se décompose en deux cercles : les cercles de Villarceau.

Sous la direction de : Rémi LECLERCQ

REMERCIEMENTS

Nous exprimons notre profonde gratitude aux directions des études de l'Université Paris-Sud et du Magistère de mathématiques qui nous ont permis de compléter notre formation par un travail encadré de recherche.

Toute notre reconnaissance va à Rémi LECLERCQ qui a bien voulu superviser notre projet et nous encadrer avec pertinence et dynamisme.

Nous remercions vivement notre enseignant François CHARLES pour son aide généreuse et ses éclaircissements au sujet des courbes unicursales et du théorème de Bézout.

Nous adressons enfin nos sincères remerciements à Damien THOMINE et Anne VAUGON pour leur présence à notre soutenance.

INTRODUCTION ET MOTIVATIONS

Soit un tore de révolution de \mathbb{R}^3 et M un de ses points, la section de ce tore avec un plan quelconque contenant M sera, hors cas dégénérés, une simple quartique. Cependant, si le plan est choisi de telle manière à ce qu'il contienne l'axe du tore ou qu'il y soit perpendiculaire, la section se décomposera dans le premier cas, en deux cercles nommés méridiens dont un seul contiendra M (voir figure 1) et dans le second, en un ou deux cercle(s) nommé(s) parallèle(s) dont un seul contiendra le point M (voir figure 2).

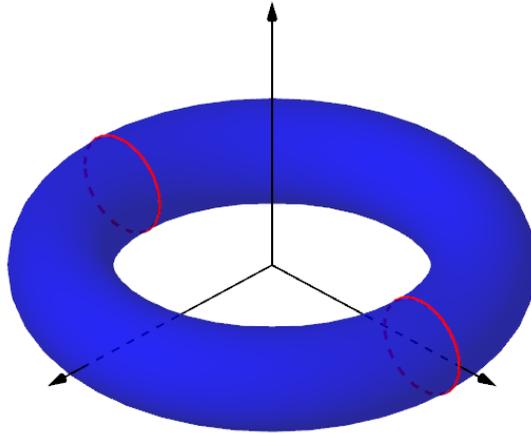


FIGURE 1. Représentation d'une paire de cercles méridiens d'un tore de révolution de \mathbb{R}^3 .

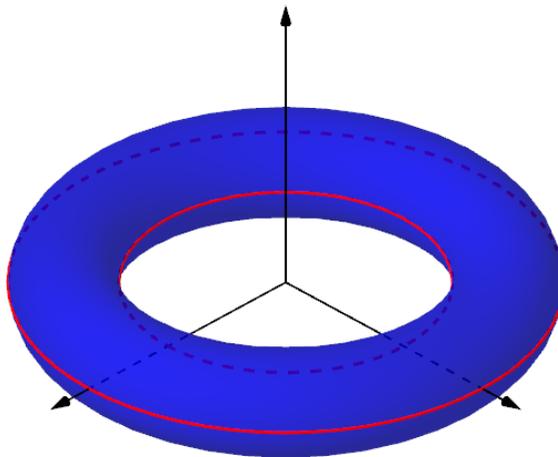


FIGURE 2. Représentation d'une paire de cercles parallèles d'un tore de révolution de \mathbb{R}^3 .

De manière plus surprenante, on peut encore construire par section plane du tore deux cercles passant par le point M (voir figures 3 et 4), on les nomme cercles de Villarceau. Ils s'obtiennent en choisissant un plan dit bitangent au tore, il s'agit d'un plan passant par le centre du tore et formant un angle précis avec son axe de telle manière qu'il soit tangent au tore en exactement deux points.

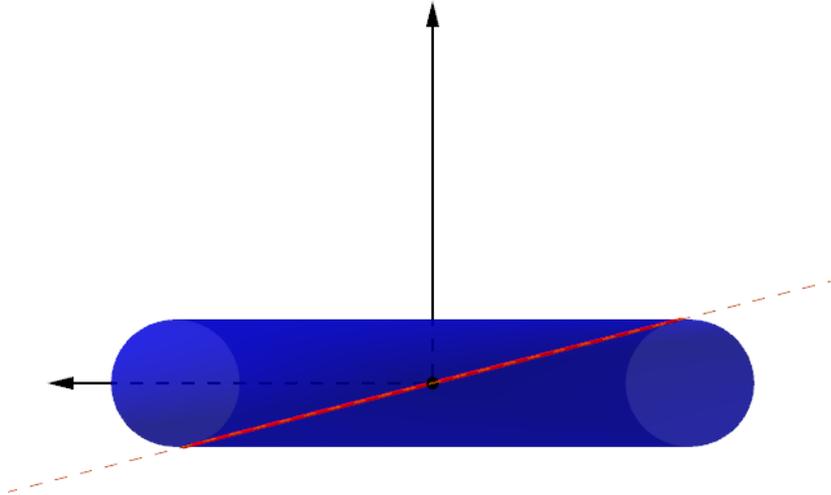


FIGURE 3. Représentation d'un plan bitangent à un tore de révolution de \mathbb{R}^3 et de l'un des cercles de Villarceau associé, vue longitudinale.

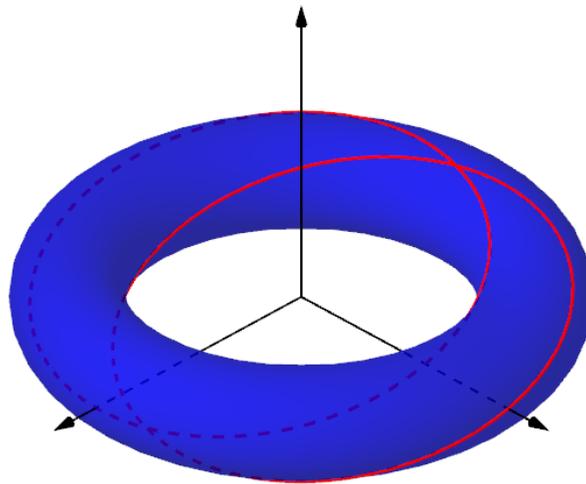


FIGURE 4. Représentation d'une paire de cercles de Villarceau d'un tore de révolution de \mathbb{R}^3 .

Cette troisième famille de cercles du tore a historiquement été caractérisée par l'ingénieur, astronome et mathématicien français Antoine Yvon Villarceau (1813-1883) dans une note de 1838 adressée au

mathématicien, physicien et astronome français Jacques Babinet (1794-1872), clôturant ainsi le problème des familles de cercles sur le tore : par un point d'un tore de révolution de \mathbb{R}^3 passent exactement quatre cercles (voir figure 5).

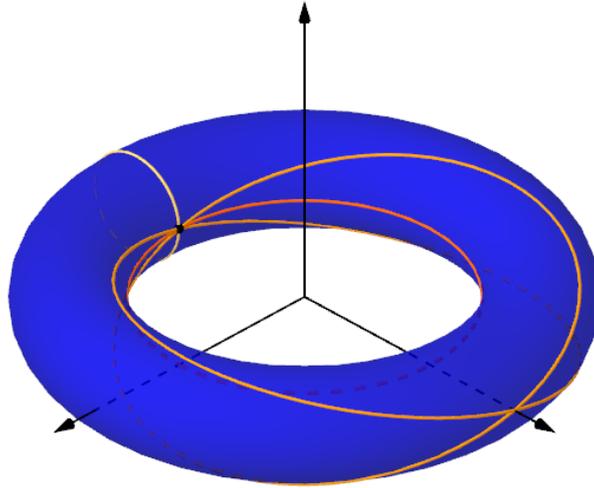


FIGURE 5. Représentation des quatre cercles passant par un point donné d'un tore de révolution de \mathbb{R}^3 .

Cependant, ces cercles étaient connus des architectes bien avant Villarceau, puisqu'on les retrouve notamment dans les escaliers du musée de la cathédrale de Strasbourg, œuvre de Thomas Uhlberger datant des années 1580.

Notre dossier s'éloignera de l'approche analytique de Villarceau en proposant une caractérisation de ces cercles via la géométrie moderne : la géométrie projective et algébrique. La force de cette démonstration réside dans sa simplicité et sa concision, mais elle permet surtout d'appréhender plus aisément la généralisation suivante au théorème de Villarceau :

Théorème. Soit Σ une surface de révolution dont les méridiens sont des coniques *i.e.* dont l'intersection avec un plan contenant son axe est une conique, alors la section de Σ avec un de ses plans bitangents est décomposée en deux coniques congruentes *i.e.* superposables par composition de translations et rotations.

La preuve ici donnée au théorème de Villarceau s'appuie sur [Fel], document que nous avons tâché de rendre plus accessible puisqu'il est d'une très grande concision. En effet, nous tenions vivement à produire un dossier qui ne ferait appel qu'à des notions élémentaires et qui par là même donnerait un bref aperçu de ce qu'est la géométrie moderne.

1. RUDIMENTS DE GÉOMÉTRIE PROJECTIVE ET ALGÈBRE

Dans cette partie, k est un corps commutatif quelconque.

1.1. **Les espaces projectifs et les coordonnées homogènes.** Dans cette sous-section, E est un espace vectoriel sur k non réduit à $\{0_E\}$.

On suppose pour l'instant que E est de dimension quelconque.

Définition-Proposition 1.1. On considère \sim la relation d'équivalence sur $E \setminus \{0_E\}$ définie par :

$$\forall u, v \in E \setminus \{0_E\}, u \sim v \stackrel{\text{déf.}}{\Leftrightarrow} (u, v) \text{ est } k\text{-liée} \Leftrightarrow \exists \lambda \in k^* : u = \lambda v.$$

On appelle espace projectif associé à E et on note $P(E)$, le quotient de l'ensemble $E \setminus \{0_E\}$ par \sim .

Démonstration. Vérifions que la relation binaire \sim est bien une relation d'équivalence sur $E \setminus \{0_E\}$.

- **Réflexivité.** Soit $u \in E \setminus \{0_E\}$, on a :

$$u = 1 \cdot u, \text{ avec } 1 \in k^*.$$

Finalement, on a $u \sim u$.

- **Symétrie.** Soient $u, v \in E \setminus \{0_E\}$, $u \sim v$, il existe $\lambda \in k^*$ tel que :

$$u = \lambda v.$$

k étant un corps, $\lambda \in k^\times$, le groupe des unités de k , si bien que :

$$v = \lambda^{-1}u, \text{ avec } \lambda^{-1} \in k^*.$$

Finalement, on a $v \sim u$.

- **Transitivité.** Soient $u, v, w \in E \setminus \{0_E\}$, $u \sim v$ et $v \sim w$, il existe $\lambda, \mu \in k^*$ tels que :

$$u = \lambda v \text{ et } v = \mu w.$$

En particulier, on a :

$$u = (\lambda\mu)w, \text{ avec } \lambda\mu \in k^*.$$

Finalement, on a $u \sim w$.

□

Remarque 1.2. $P(E)$ est l'ensemble des droites vectorielles de E .

Définition 1.3. On appelle plan projectif de $P(E)$, tout espace projectif $P(F)$, où F est un sous-espace vectoriel de dimension 3 de E .

Définition 1.4. On appelle espace projectif de dimension n sur k et on note indifféremment $P_n(k)$ ou $k\mathbb{P}^n$ l'espace projectif $P(k^{n+1})$.

Remarque 1.5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace projectif de dimension n sur k admet la décomposition géométrique suivante :

$$P_n(k) \cong k^n \sqcup P_{n-1}(k),$$

$$\text{où } k^n \cong \{[x_1 : \dots : x_n : 1]; (x_1, \dots, x_n) \in k^n\},$$

$$\text{et } P_{n-1}(k) \cong \{[x_1 : \dots : x_n : 0]; (x_1, \dots, x_n) \in k^n \setminus \{0_{k^n}\}\}.$$

On suppose désormais que E est de dimension finie égale à $n + 1$ et on en fixe une base dans laquelle tous ses vecteurs seront décomposés.

Définition 1.6. Soit π la surjection canonique de $E \setminus \{0_E\}$ dans $P(E)$:

$$\pi : \begin{cases} E \setminus \{0_E\} & \rightarrow & P(E) \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) & \mapsto & [X_1 : \dots : X_{n+1}] \end{cases}.$$

Soit $X \in P(E)$, tout élément de la préimage de $\{X\}$ par π est appelé coordonnées homogènes de X et $\pi^{-1}(\{X\})$ est le système de coordonnées homogènes de X .

Remarque 1.7. Soit $X \in P(E)$, si $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in E \setminus \{0_E\}$ sont des coordonnées homogènes de X , alors on a :

$$\pi^{-1}(\{X\}) = \{\lambda(x_1, \dots, x_{n+1}); \lambda \in k^*\}.$$

Définition 1.8. Soient $X \in P(E)$ et $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in E \setminus \{0_E\}$ des coordonnées homogènes de X , les deux cas suivants se présentent :

- Si $x_{n+1} = 0$, d'après la définition 1.6 le système de coordonnées homogènes de X est de la forme :

$$\{\lambda(x_1, \dots, x_n, 0); \lambda \in k^*\}.$$

On dit que X est un point à l'infini de $P(E)$.

- Si $x_{n+1} \neq 0$, on dit que X est un point affine de $P(E)$ et d'après la définition 1.6, le $(n + 1)$ -uplet suivant :

$$(x_{n+1}^{-1}x_1, \dots, x_{n+1}^{-1}x_n, 1)$$

est un élément du système de coordonnées homogènes de X , il s'agit des coordonnées homogènes normalisées de X .

1.2. Les ensembles algébriques sur un corps et l'homogénéisation.

Définition 1.9. Soit $S \subset k[T_1, \dots, T_n]$ un ensemble de polynômes à n indéterminées à coefficients dans k , on dit que :

$$Z(S) := \{(x_1, \dots, x_n) \in k^n; \forall f \in S, f(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

est l'ensemble algébrique de k^n défini par S .

Remarque 1.10. Pour toute partie $S \subset k[T_1, \dots, T_n]$, on a :

$$Z(S) = Z(\langle S \rangle),$$

où $\langle S \rangle$ est l'idéal engendré par S .

Pour plus de clarté, on se restreint désormais aux ensembles algébriques de k^n pour lesquels la partie S est réduite à un singleton.

Définition-Proposition 1.11. Soit \mathcal{M} un ensemble algébrique de k^n défini par un polynôme $f \in k[T_1, \dots, T_n]$. On construit alors f^* de la manière suivante :

$$f^* := (T_{n+1})^{\deg(f)} \times f \left(\frac{T_1}{T_{n+1}}, \dots, \frac{T_n}{T_{n+1}} \right).$$

(i) f^* est un polynôme homogène de même degré que f .

(ii) Pour tout $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in E \setminus \{0_E\}$, on a :

$$\forall \lambda \in k^*, f^*(\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow f^*(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0.$$

$f^*(X) = 0$ est donc une équation bien définie dans $P_n(k)$.

(iii) L'homogénéisation de \mathcal{M} consiste en la définition de l'ensemble algébrique de $P_n(k)$ défini par f^* , on le note \mathcal{M}^* et on l'appelle l'homogénéisé de \mathcal{M} . On dira aussi que $f^*(X_1, \dots, X_{n+1}) = 0$ est l'équation projective de \mathcal{M} .

(iv) Pour tout $[X_1 : \dots : X_n : 1] \in P_n(k)$, on a :

$$[X_1 : \dots : X_n : 1] \in \mathcal{M}^* \Leftrightarrow (X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{M}.$$

En d'autres termes, \mathcal{M}^* prolonge \mathcal{M} à $P_n(k)$.

Démonstration. Il s'agit d'abord de vérifier que f^* définit bien un polynôme de $k[T_1, \dots, T_{n+1}]$. On commence par écrire :

$$(1) \quad f = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \prod_{j=1}^n (T_j)^{m_{i,j}},$$

avec $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in k^{(\mathbb{N})}$ et pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(m_{i,j})_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

On rappelle alors qu'avec les notations introduites, on a :

$$\deg(f) \stackrel{\text{déf.}}{=} \max_{i \in \mathbb{N} : a_i \neq 0} \left(\sum_{j=1}^n m_{i,j} \right),$$

qui est un entier naturel puisque $\{i \in \mathbb{N} : a_i \neq 0\}$ est un ensemble fini. Par définition de f^* et avec (1), on a :

$$(2) \quad f^* = (T_{n+1})^{\deg(f)} \times \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \prod_{j=1}^n \left(\frac{T_j}{T_{n+1}} \right)^{m_{i,j}}.$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on définit l'entier naturel suivant :

$$m_{i,n+1} := \begin{cases} \deg(f) - \sum_{j=1}^n m_{i,j}, & \text{si } a_i \neq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

On constate alors que l'on peut réécrire (2) de la manière suivante :

$$f^* = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i (T_{n+1})^{m_{i,n+1}} \prod_{j=1}^n (T_j)^{m_{i,j}} = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \prod_{j=1}^{n+1} (T_j)^{m_{i,j}}.$$

Avec cette écriture, il est apparent que f^* est un polynôme de $k[T_1, \dots, T_{n+1}]$. On calcule désormais le degré de f^* et on constate pour cela que quelque soit $i \in \mathbb{N}$ tel que $a_i \neq 0$, on a :

$$\sum_{j=1}^{n+1} m_{i,j} = \sum_{j=1}^n m_{i,j} + \deg(f) - \sum_{j=1}^n m_{i,j} = \deg(f).$$

En d'autres termes, tous les monômes de f^* sont de degré égal à $\deg(f)$ et à ce titre f^* est un polynôme homogène de même degré que f .

Assurons-nous maintenant que $f^*(X) = 0$ est une équation bien définie dans $P_n(k)$. Soit alors $X \in P_n(k)$ et $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \pi^{-1}(\{X\})$, f^* étant un polynôme homogène, on a :

$$\forall \lambda \in k^*, f^*(\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1}) = \lambda^{\deg(f^*)} \times f(x_1, \dots, x_{n+1}).$$

En particulier, on en déduit que l'on a :

$$\forall \lambda \in k^*, f^*(\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0.$$

En d'autres termes, \mathcal{M}^* définit bien un ensemble algébrique de $P_n(k)$.

Enfin, on montre qu'un point $[X_1 : \dots : X_n : 1] \in P_n(k)$ est dans \mathcal{M}^* si et seulement si (X_1, \dots, X_n) appartient à \mathcal{M} .

Par définition de f^* , on constate que l'on a :

$$f^*(X_1, \dots, X_n, 1) = f(X_1, \dots, X_n).$$

En particulier, on en déduit que l'on a :

$$f^*(X_1, \dots, X_n, 1) = 0 \Leftrightarrow f(X_1, \dots, X_n) = 0.$$

En d'autres termes, par définition de \mathcal{M}^* , on a établi que :

$$[X_1 : \dots : X_n : 1] \in \mathcal{M}^* \Leftrightarrow (X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{M}.$$

□

Remarque 1.12. Géométriquement, homogénéiser un ensemble algébrique de k^n revient à le prolonger sur l'hyperplan à l'infini de $P_n(k)$. Ainsi, pour retrouver l'ensemble algébrique initial, il suffit d'intersecter l'homogénéisé avec un quelconque hyperplan de $P_n(k)$.

Remarque 1.13. Dans la suite, on travaillera avec $k = \mathbb{C}$. Soit \mathcal{M} un ensemble algébrique de \mathbb{R}^n défini par $f \in \mathbb{R}[T_1, \dots, T_n]$, on construit alors ce que l'on appelle l'homogénéisé complexe de \mathcal{M} en suivant le procédé suivant :

- **Étape 1.** On complexifie \mathcal{M} , c'est-à-dire que l'on considère l'ensemble algébrique de \mathbb{C}^n suivant :

$$\mathcal{M}_{\mathbb{C}} := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n; f(x_1, \dots, x_n) = 0\}.$$

- **Étape 2.** On applique à $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ la construction décrite dans la définition-proposition 1.11 pour obtenir un ensemble algébrique noté $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}^*$ de $P_n(\mathbb{C})$.

1.3. Les espaces projectifs complexes et les points cycliques.

Définition 1.14. Un cercle d'un plan projectif complexe est l'homogénéisé complexe d'un cercle de \mathbb{R}^2 . Les cercles d'un plan projectif sont d'équation :

$$X^2 + Y^2 - 2aXZ - 2bYZ + (a^2 + b^2 - r^2)Z^2 = 0,$$

avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

Définition 1.15. Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit les points cycliques d'un plan de $P_n(\mathbb{C})$ comme étant les points à l'infini des cercles de ce plan.

Proposition 1.16. Les points cycliques du plan projectif $P_2(\mathbb{C})$ sont :

$$I := [1 : i : 0] \text{ et } J := [1 : -i : 0].$$

Démonstration. Soit \mathcal{C} un cercle de $P_2(\mathbb{C})$, d'après la définition 1.14, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$\mathcal{C} : X^2 + Y^2 - 2aXZ - 2bYZ + (a^2 + b^2 - r^2)Z^2 = 0.$$

Pour tout $[X : Y : Z] \in P_2(\mathbb{C})$, on a :

$$\begin{aligned} [X : Y : Z] \in \mathcal{C} \cap \{Z = 0\} &\Leftrightarrow X^2 + Y^2 = 0 \text{ et } Z = 0 \\ &\Leftrightarrow (X - iY)(X + iY) = 0 \text{ et } Z = 0 \\ &\Leftrightarrow (X = iY \text{ ou } X = -iY) \text{ et } Z = 0 \\ &\Leftrightarrow [X : Y : Z] \in \{[1 : i : 0], [1 : -i : 0]\} \\ &\Leftrightarrow [X : Y : Z] \in \{I, J\}. \end{aligned}$$

Dès lors, d'après la définition 1.8, les points à l'infini de \mathcal{C} sont I et J . Finalement, les points cycliques d'un plan projectif sont bien I et J . \square

Proposition 1.17. Une conique de \mathbb{R}^2 dont l'homogénéisée complexe passe par les points cycliques de $P_2(\mathbb{C})$ est un cercle.

Démonstration. Soit \mathcal{C} une conique de \mathbb{R}^2 , il existe $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ tels que :

$$\mathcal{C} : ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

L'équation homogène complexe de \mathcal{Q} est alors :

$$\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^* : aX^2 + bXY + cY^2 + dXZ + eYZ + fZ^2 = 0.$$

Par hypothèse $I, J \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^*$ et avec la définition-proposition 1.17, il vient :

$$a - c \pm ib = 0.$$

En particulier, on a $a = c$ et $b = 0$ et puisque $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, on a nécessairement $a \neq 0$. L'équation de \mathcal{C} est alors :

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a}y + \frac{f}{a} = 0.$$

Finalement, \mathcal{C} est un cercle, éventuellement vide ou réduit à un point. \square

Définition 1.18. L'ombilicale est l'ensemble des points cycliques de tous les plans projectifs de $P_3(\mathbb{C})$.

Définition 1.19. Une sphère de $P_3(\mathbb{C})$ est l'homogénéisée complexe d'une sphère de \mathbb{R}^3 . Les sphères de $P_3(\mathbb{C})$ sont d'équation :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2aXT - 2bYT - 2cZT + (a^2 + b^2 + c^2 - r^2)T^2 = 0,$$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

Proposition 1.20. L'ombilicale est la courbe de $P_3(\mathbb{C})$ d'équation :

$$\mathcal{O} : X^2 + Y^2 + Z^2 = 0 \text{ et } T = 0.$$

Démonstration. On remarque que tout cercle de \mathbb{R}^3 est inclus dans une sphère et que réciproquement une sphère de \mathbb{R}^3 est par exemple réunion de ses cercles méridiens. Dès lors, d'après les définitions 1.3, 1.14 et 1.19, un point de $P_3(\mathbb{C})$ appartient à un cercle de $P_3(\mathbb{C})$ si et seulement si il appartient à une sphère de $P_3(\mathbb{C})$, si bien que les points cycliques de tous les plans de $P_3(\mathbb{C})$ sont les points à l'infini de ses sphères.

Soit alors \mathcal{S} une sphère de $P_3(\mathbb{C})$, d'après la définition 1.19, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$\mathcal{S} : X^2 + Y^2 + Z^2 - 2aXT - 2bYT - 2cZT + (a^2 + b^2 + c^2 - r^2)T^2 = 0.$$

Ainsi, d'après la définition 1.8, les points à l'infini de \mathcal{S} satisfont :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0 \text{ et } T = 0.$$

Finalement, \mathcal{S} étant une sphère quelconque de $P_3(\mathbb{C})$, d'après la définition 1.18 et d'après notre remarque préliminaire, l'ombilicale est d'équation :

$$\mathcal{O} : X^2 + Y^2 + Z^2 = 0 \text{ et } T = 0.$$

\square

1.4. Intersection des courbes algébriques planes et des surfaces algébriques. Dans cette sous-section, on suppose que le corps commutatif k est algébriquement clos *i.e.* que tout polynôme non constant à coefficients dans k admet au moins une racine dans k .

Définition 1.21. Soit $f \in k[T_1, \dots, T_n]$, on définit le degré de $Z(\{f\})$ comme étant le degré du polynôme f .

- Si $n = 2$, on dit que $Z(\{f\})$ est une courbe algébrique plane.
- Si $n = 3$, on dit que $Z(\{f\})$ est une surface algébrique.

Définition 1.22. Soit \mathcal{M} un ensemble algébrique de k^n défini par le polynôme $f \in k[T_1, \dots, T_n]$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{M}$, on dit que (x_1, \dots, x_n) est un point de multiplicité $\mu \in \mathbb{N}^*$ dans \mathcal{M} si et seulement si (x_1, \dots, x_n) vérifie les deux propriétés suivantes :

- $\forall i \in \llbracket 1, \mu - 1 \rrbracket, d_{(x_1, \dots, x_n)}^i f \equiv 0,$
- $d_{(x_1, \dots, x_n)}^\mu f \not\equiv 0.$
- Si $\mu = 1$, on dit que (x_1, \dots, x_n) est un point régulier de \mathcal{M} .
- Sinon, on dit que (x_1, \dots, x_n) est un point singulier de \mathcal{M} .

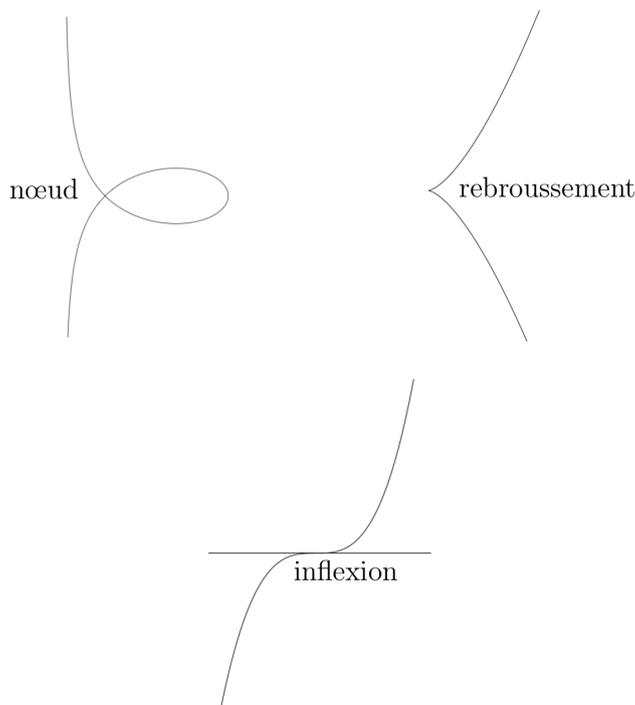


FIGURE 6. Les différents types de points doubles d'une courbe algébrique plane.

Remarque 1.23. Soit \mathcal{M} un ensemble algébrique de k^n défini par un unique polynôme et soit $M \in \mathcal{M}$, d'après les définitions 1.21 et 1.22, la multiplicité de M dans \mathcal{M} est inférieure ou égale au degré de \mathcal{M} .

Proposition 1.24. Soit Σ une surface algébrique et soit M_0 un point régulier de Σ . Si \mathcal{P}_0 est le plan tangent à Σ en M_0 , alors $\Sigma \cap \mathcal{P}_0$ est une courbe algébrique plane de degré inférieur ou égal à celui de Σ dont le point M_0 est au moins double.

Démonstration. Soit Σ une surface algébrique définie par $f \in k[T_1, T_2, T_3]$ et soit $(x_0, y_0, z_0) \in k^3$ un de ses points réguliers. L'équation du plan tangent à Σ au point (x_0, y_0, z_0) s'écrit alors :

$$\frac{\partial f}{\partial T_1}(x_0, y_0, z_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial T_2}(x_0, y_0, z_0)(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial T_3}(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) = 0,$$

où $\left(\frac{\partial f}{\partial T_1}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial T_2}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial T_3}(x_0, y_0, z_0) \right) \neq (0, 0, 0)$.

Sans perte de généralités, on suppose que $\frac{\partial f}{\partial T_3}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, si bien que l'équation du plan tangent à Σ au point (x_0, y_0, z_0) se réécrit :

$$(3) \quad \mathcal{P}_0 : z = z_0 - \frac{\frac{\partial f}{\partial T_1}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial f}{\partial T_3}(x_0, y_0, z_0)}(x - x_0) - \frac{\frac{\partial f}{\partial T_2}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial f}{\partial T_3}(x_0, y_0, z_0)}(y - y_0).$$

On introduit alors le polynôme suivant :

$$g := z_0 - \frac{\frac{\partial f}{\partial T_1}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial f}{\partial T_3}(x_0, y_0, z_0)}(T_1 - x_0) - \frac{\frac{\partial f}{\partial T_2}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial f}{\partial T_3}(x_0, y_0, z_0)}(T_2 - y_0) \in k[T_1, T_2].$$

Par construction de Σ et d'après (3), on a :

$$(4) \quad \Sigma \cap \mathcal{P}_0 : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ z = g(x, y) \end{cases}.$$

On introduit désormais le polynôme suivant :

$$\tilde{f} := f(T_1, T_2, g(T_1, T_2)) \in k[T_1, T_2].$$

g étant de degré 1, \tilde{f} est de degré inférieur ou égal à celui de f et d'après (4), on a :

$$(5) \quad \Sigma \cap \mathcal{P}_0 : \tilde{f}(x, y) = 0.$$

Finalement, d'après la définition 1.22, $\Sigma \cap \mathcal{P}_0$ est une courbe algébrique plane de degré inférieur ou égal à celui de Σ .

On s'intéresse maintenant à la multiplicité du point (x_0, y_0) dans $\Sigma \cap \mathcal{P}_0$ et on étudie pour ce faire les dérivées partielles de \tilde{f} en (x_0, y_0) .

Par construction de \tilde{f} , on a :

$$(6) \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial T_1}(x_0, y_0) = \frac{\partial g}{\partial T_1}(x_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial T_3}(x_0, y_0, g(x_0, y_0)) + \frac{\partial f}{\partial T_1}(x_0, y_0, g(x_0, y_0)),$$

$$(7) \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial T_2}(x_0, y_0) = \frac{\partial g}{\partial T_2}(x_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial T_3}(x_0, y_0, g(x_0, y_0)) + \frac{\partial f}{\partial T_2}(x_0, y_0, g(x_0, y_0)).$$

Or, par construction de g , on a :

$$(8) \quad \frac{\partial g}{\partial T_1}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial T_1}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial f}{\partial T_3}(x_0, y_0, z_0)},$$

$$(9) \quad \frac{\partial g}{\partial T_2}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial T_2}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial f}{\partial T_3}(x_0, y_0, z_0)}.$$

Mais comme $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{P}_0$, d'après (3), on a $z_0 = g(x_0, y_0)$, si bien qu'avec (8) et (9), il vient :

$$(10) \quad \frac{\partial g}{\partial T_1}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial T_1}(x_0, y_0, g(x_0, y_0))}{\frac{\partial f}{\partial T_3}(x_0, y_0, g(x_0, y_0))},$$

$$(11) \quad \frac{\partial g}{\partial T_2}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial T_2}(x_0, y_0, g(x_0, y_0))}{\frac{\partial f}{\partial T_3}(x_0, y_0, g(x_0, y_0))}.$$

En réinjectant respectivement (10) dans (6) et (11) dans (7), on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial T_1}(x_0, y_0) &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial T_2}(x_0, y_0) &= 0. \end{aligned}$$

Finalement, d'après la définition 1.19, $\Sigma \cap \mathcal{P}_0$ est une courbe algébrique plane de degré inférieur ou égal à celui de Σ dont le point (x_0, y_0, z_0) est au moins double. □

Définition 1.25. Soient \mathcal{C} et \mathcal{D} deux courbes algébriques planes respectivement définies par les polynômes f et g , s'il existe $h \in k[T_1, T_2]$ divisant f et g , on dit que $Z(\{h\})$ est une composante commune des courbes \mathcal{C} et \mathcal{D} . Sinon, si f et g sont sans facteurs communs non constants, les courbes \mathcal{C} et \mathcal{D} sont dites sans composantes communes.

Théorème 1.26. (Bézout) Soient \mathcal{C} une courbe algébrique plane de degré m et \mathcal{D} une courbe algébrique plane de degré n . Si \mathcal{C} et \mathcal{D} n'ont

pas de composantes communes, alors l'intersection des homogénéisées \mathcal{C}^* et \mathcal{D}^* se fait en mn points comptés avec multiplicités.

Exemple 1.27. Illustrons le théorème de Bézout, on se place dans le corps \mathbb{C} qui est algébriquement clos. On considère alors l'homogénéisée complexe du quadrifolium, il s'agit de la sextique de $P_2(\mathbb{C})$ d'équation :

$$(X^2 + Y^2)^3 - 4X^2Y^2Z^2 = 0,$$

et l'homogénéisée complexe du trifolium projectif, il s'agit de la quartique de $P_2(\mathbb{C})$ d'équation :

$$(X^2 + Y^2)^2 + (3X^2Y - Y^3)Z = 0.$$

Ces deux courbes étant sans composantes communes, le théorème 1.26 assure que leur intersection se fait en 24 points comptés avec multiplicité. Si l'on examine la figure 7, on compte 5 points d'intersection distincts, les points I_1, I_2, I_3, I_4 sont simples et le point I_5 est de multiplicité 14, ce qui nous fait au total 18 points d'intersection comptés avec multiplicité. Il reste deux points d'intersections triples que l'on a pas pu représenter sur la figure 7, il s'agit des points cycliques de $P_2(\mathbb{C})$.

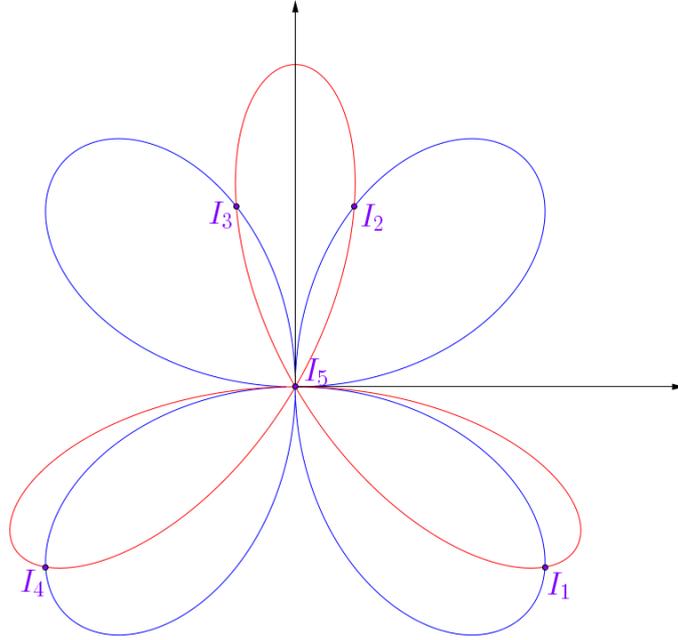


FIGURE 7. Représentation des points d'intersection du quadrifolium et du trifolium dans \mathbb{R}^2 .

Ce théorème doit être pensé comme un transfert à $P_2(k)$ du caractère algébriquement clos du corps k ; bien que standard, il reste cependant assez technique à établir, si bien que l'on se contentera de montrer le résultat plus faible suivant qui suffira à l'ensemble de nos applications :

Proposition 1.28. Soient \mathcal{C} une conique non dégénérée et \mathcal{D} une courbe algébrique plane de degré n . Si \mathcal{C} et \mathcal{D} n'ont pas de composantes communes, alors l'intersection des homogénéisées \mathcal{C}^* et \mathcal{D}^* se fait en au plus $2n$ points comptés avec multiplicités.

Avant de donner la preuve de la proposition 1.28, rappelons le résultat suivant sur la paramétrisation des coniques non dégénérées :

Lemme 1.29. Les coniques non dégénérées sont unicursales *i.e.* en dehors d'un nombre fini de points elles admettent une paramétrisation cartésienne dont les coordonnées sont des fractions rationnelles en le paramètre.

- L'ellipse de demi-grand axe $a \in \mathbb{R}_+^*$ et de demi-petit axe $b \in \mathbb{R}_+^*$ admet la paramétrisation rationnelle suivante :

$$\mathcal{E}(a, b) : \begin{cases} x(t) &= a \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) &= b \frac{2t}{1+t^2} \end{cases} .$$

- La parabole de paramètre $p \in \mathbb{R}_+^*$ admet la paramétrisation rationnelle suivante :

$$\mathcal{P}(p) : \begin{cases} x(t) &= \frac{pt^2}{2} \\ y(t) &= pt \end{cases} .$$

- L'hyperbole de demi-axe focal $a \in \mathbb{R}_+^*$ et de demi-axe non focal $b \in \mathbb{R}_+^*$ admet la paramétrisation rationnelle suivante :

$$\mathcal{H}(a, b) : \begin{cases} x(t) &= a \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ y(t) &= b \frac{2t}{1-t^2} \end{cases} .$$

Les paramétrisations rationnelles des ellipses et des hyperboles se déduisent sans difficulté de leur paramétrisation trigonométrique usuelle en utilisant le changement de variable bijectif suivant :

$$\varphi : \begin{cases}]-\pi, \pi[&\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \tan\left(\frac{u}{2}\right) \end{cases} .$$

La paramétrisation rationnelle de la parabole résulte quand à elle directement de la définition.

Démonstration. (proposition 1.28) Soient \mathcal{C} une conique non dégénérée et \mathcal{D} une courbe algébrique plane définie par $f \in k[T_1, T_2]$ de degré n . D'après le lemme 1.29, il existe $p_1, p_2, p_3 \in k_2[T_1]$, des polynômes de

degré au plus 2, vérifiant :

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x(t) = \frac{p_1(t)}{p_3(t)} \\ y(t) = \frac{p_2(t)}{p_3(t)} \end{cases} .$$

On en déduit que l'on a :

$$(12) \quad \mathcal{C}^* : \begin{cases} X(t) = p_1(t) \\ Y(t) = p_2(t) \\ Z(t) = p_3(t) \end{cases} .$$

On introduit alors l'application suivante :

$$\tilde{f}^* : t \in k \mapsto f^*(p_1(t), p_2(t), p_3(t)).$$

En particulier, il vient :

$$(13) \quad \mathcal{C}^* \cap \mathcal{D}^* : \left\{ [p_1(t) : p_2(t) : p_3(t)]; t \in k : \tilde{f}^*(t) = 0 \right\} .$$

D'après la définition-proposition 1.11, f^* est un polynôme homogène de degré n , si bien que \tilde{f}^* est un polynôme en t de degré au plus $2n$. Par ailleurs, $\tilde{f}^* \not\equiv 0$, sinon d'après (12) et (13), on aurait $\mathcal{C}^* \subset \mathcal{D}^*$ et en particulier, \mathcal{C} et \mathcal{D} auraient une composante commune, ce qui est exclu. Dès lors, puisque le corps k est algébriquement clos, f^* admet au plus $2n$ racines comptées avec multiplicité. Finalement, d'après (13), les courbes \mathcal{C}^* et \mathcal{D}^* s'intersectent en au plus $2n$ points avec multiplicité. \square

Remarque 1.30. Soit \mathcal{C} une conique et \mathcal{D} une courbe algébrique plane de degré n , d'après la définition-proposition 1.1 et la proposition 1.28, \mathcal{C} et \mathcal{D} s'intersectent en au plus $2n$ points comptés avec multiplicité.

Corollaire 1.31. Une courbe algébrique plane non vide dont le degré inférieur ou égal à 4 et ayant au moins quatre points doubles est la réunion de deux coniques.

Démonstration. Soit \mathcal{D} une courbe algébrique plane non vide dont le degré inférieur ou égal à 4 et ayant au moins quatre points doubles, disons S_1, S_2, S_3, S_4 . Soit $M_1 \in \mathcal{D} \setminus \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ un point choisi de telle manière qu'aucun triplet de points de $\{M_1, S_1, S_2, S_3, S_4\}$ ne soit alignés, on considère alors \mathcal{C}_1 la conique non dégénérée passant par les points S_1, S_2, S_3, S_4, M_1 . Par construction, \mathcal{C}_1 intersecte \mathcal{D} en au moins 9 points comptés avec multiplicité et si par l'absurde, \mathcal{D} et \mathcal{C}_1 étaient sans composantes communes, d'après la proposition 1.28, \mathcal{C}_1 intersecterait \mathcal{D} en au plus 8 points comptés avec multiplicité, ce qui n'est pas. En considérant les degrés possibles d'une composante commune à \mathcal{C}_1 et \mathcal{D} , on en déduit que soit il existe une droite projective \mathcal{D} telle que $\mathcal{D} \subset \mathcal{D} \cap \mathcal{C}_1$ ou bien $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{D}$. Dans le premier cas, la conique \mathcal{C}_1 est réunion de deux droites *i.e.* elle est dégénérée, ce qui n'est pas et

c'est donc que $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{Q}$. Soit désormais, $M_2 \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{C}_1$ un point choisi de telle manière qu'aucun triplet de points de $\{M_2, S_1, S_2, S_3, S_4\}$ ne soit alignés, on considère alors \mathcal{C}_2 la conique non dégénérée passant par les points S_1, S_2, S_3, S_4, M_2 , avec le même raisonnement $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{Q}$.

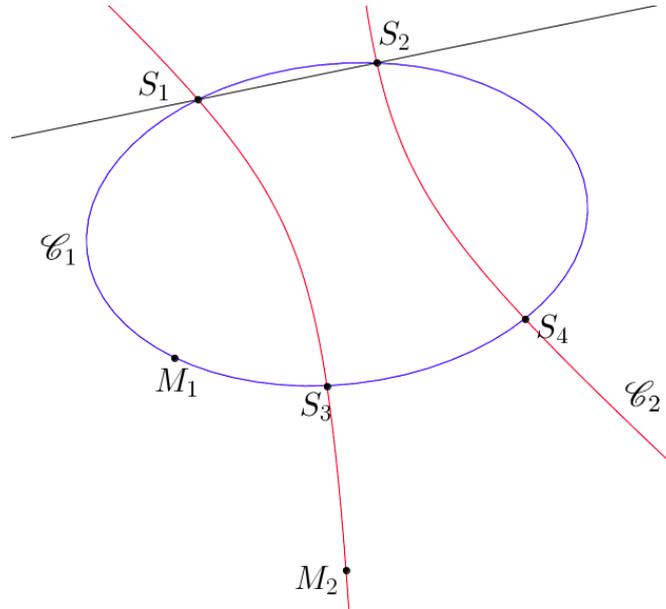


FIGURE 8. Illustration de la construction menée dans la preuve.

Par construction, les coniques \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont distinctes, si bien que :

$$(14) \quad \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{Q}.$$

Finalement, \mathcal{Q} étant de degré inférieur ou égal à 4, (14) lui impose d'être exactement de degré 4, si bien que l'on a $\mathcal{Q} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$.

□

2. ÉTUDE ALGÈBRE DU TORE

2.1. Une équation cartésienne implicite du tore. On se place dans \mathbb{R}^3 que l'on munit de sa structure euclidienne canonique *i.e.* celle qui rend orthonormale sa base naturelle. On introduit alors les axes associés aux vecteurs de la base naturelle :

$$\widehat{x} := \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{y} := \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{z} := \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 2.1. On appelle tore de révolution standard de \mathbb{R}^3 de paramètres $(r, R) \in \mathbb{R}^2$, avec $r < R$ et on note $\mathbb{T}^2(r, R)$, la surface obtenue par révolution autour de l'axe \widehat{z} du cercle de rayon r et de centre $\begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On souhaite déterminer une équation cartésienne implicite de $\mathbb{T}^2(r, R)$, en d'autres termes, on cherche une application f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} satisfaisant la propriété suivante :

$$\forall M := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, M \in \mathbb{T}^2(r, R) \Leftrightarrow f(x, y, z) = 0.$$

Proposition 2.2. Une équation cartésienne implicite du tore de révolution standard de \mathbb{R}^3 de paramètres $(r, R) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ est la suivante :

$$\mathbb{T}^2(r, R) : (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2).$$

Démonstration. On considère $M := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et on note $\mathcal{P}_{\widehat{z}}(M)$ le plan qui contient le point M et l'axe \widehat{z} . Par construction, $M \in \mathcal{P}_{\widehat{z}}(M)$ et on en déduit alors que l'on a :

$$(15) \quad M \in \mathbb{T}^2(r, R) \Leftrightarrow M \in \mathcal{P}_{\widehat{z}}(M) \cap \mathbb{T}^2(r, R).$$

D'après la définition 2.1, on observe que $\mathcal{P}_{\widehat{z}}(M) \cap \mathbb{T}^2(r, R)$ est la réunion de deux cercles de rayon r , symétriques par rapport à l'axe \widehat{z} , si bien qu'un seul de ces cercles est susceptible de contenir M *i.e.* celui dont la première coordonnée du centre est de même signe que la première coordonnée du point M . Pour des besoins techniques, on introduit C son centre, ce qui nous permet alors de définir M_{\perp} le projeté orthogonal de M sur la droite (OC) , où $O := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On synthétise la situation dans les figures 9 et 10 que l'on trouvera plus loin ci-dessous.

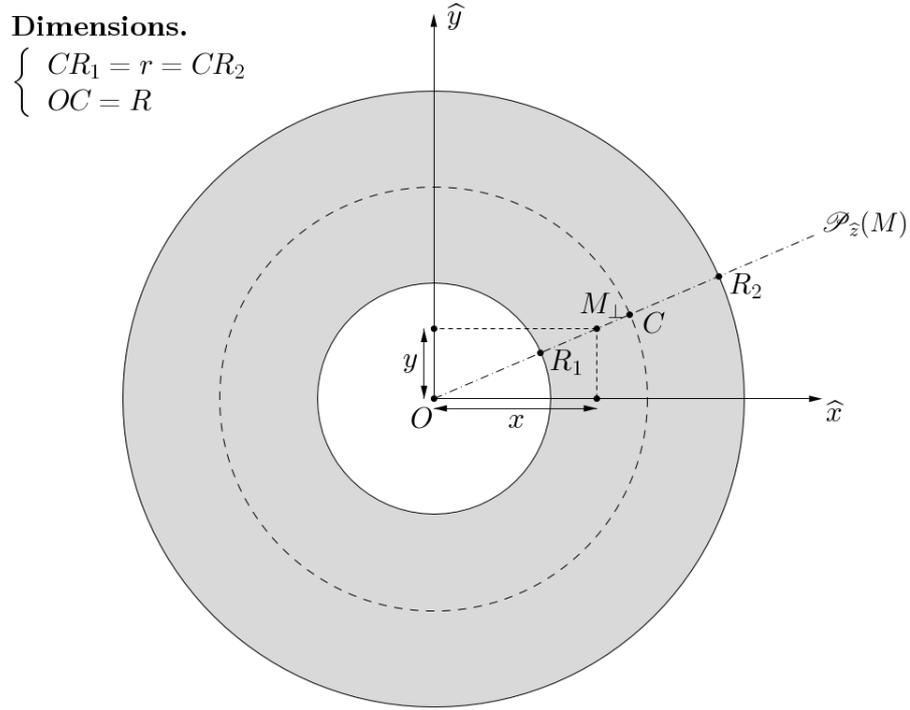


FIGURE 9. Vue en coupe de $\mathbb{T}^2(r, R)$ dans le plan $(\hat{x}O\hat{y})$.

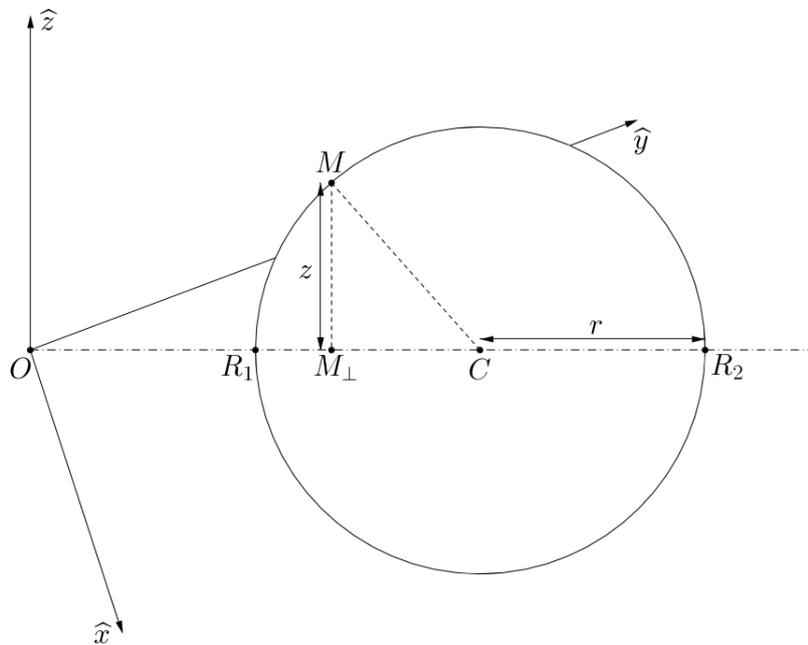


FIGURE 10. Vue en coupe de $\mathbb{T}^2(r, R)$ dans le plan $\mathcal{P}_{\hat{z}}(M)$.

En se plaçant dans le plan $(\widehat{xO\widehat{y}})$, on constate que l'on a :

$$(16) \quad CM_{\perp} = R - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

En se plaçant désormais dans le plan $\mathcal{P}_{\widehat{z}}(M)$ et en se référant à la figure 10, le théorème de Pythagore et l'équation (16) conduisent à :

$$(17) \quad CM^2 = \left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2.$$

Or, M appartient au cercle de centre C et de rayon r si et seulement si $CM = r$. Dès lors, avec l'équation (17), on a :

$$(18) \quad M \in \mathcal{P}_{\widehat{z}}(M) \cap \mathbb{T}^3(r, R) \Leftrightarrow r^2 = \left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2.$$

Il s'agit maintenant d'extraire algébriquement la racine du membre de droite de (18) :

$$\begin{aligned} r^2 = \left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 &\Leftrightarrow R^2 - 2R\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + \underbrace{R^2 - r^2}_{\geq 0, \text{ car } r < R} = 2R\sqrt{x^2 + y^2} \\ &\Leftrightarrow \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)}_{\geq 0} = 4R^2(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Finalement, d'après les équivalences (15) et (18), on a :

$$M \in \mathbb{T}^2(r, R) \Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2).$$

□

2.2. La régularité des points du tore.

Proposition 2.3. Tous les points de $\mathbb{T}^2(r, R)$ sont réguliers.

Démonstration. On introduit le polynôme suivant :

$$f(T_1, T_2, T_3) := (T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(T_1^2 + T_2^2).$$

D'après la proposition 2.2, on a :

$$\mathbb{T}^2(r, R) : f(x, y, z) = 0.$$

Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{T}^2(r, R)$, pour déterminer la multiplicité de (x_0, y_0, z_0) dans $\mathbb{T}^2(r, R)$, on étudie les dérivées partielles de f en (x_0, y_0, z_0) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial T_1}(x_0, y_0, z_0) &= 4x_0 (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 - r^2), \\ \frac{\partial f}{\partial T_2}(x_0, y_0, z_0) &= 4y_0 (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2 - r^2), \\ \frac{\partial f}{\partial T_3}(x_0, y_0, z_0) &= 4z_0 (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + R^2 - r^2). \end{aligned}$$

Puisque $r < R$, l'égalité suivante n'est pas satisfaite :

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = r^2 - R^2.$$

On en déduit que toutes les dérivées partielles de f en (x_0, y_0, z_0) sont nulles si et seulement si l'une des propositions suivantes est satisfaite :

$$(i) (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0),$$

$$(ii) \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = R^2 + r^2 \\ z_0 = 0 \end{cases}.$$

Or, si l'une des propositions ci-dessus était satisfaite, sachant que (x_0, y_0, z_0) appartient à $\mathbb{T}^2(r, R)$, l'une des égalités suivantes serait vérifiée :

$$(i) R^2 = r^2, \text{ ce qui contredit } r < R.$$

$$(ii) 4R^2r^2 = 0, \text{ ce qui contredit } (r, R) \in \mathbb{R}_+^{*2}.$$

On en déduit qu'il existe $j \in \{1, 2, 3\}$ tel que $\frac{\partial f}{\partial T_j}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Finalement, d'après la définition 1.22, (x_0, y_0, z_0) est un point régulier de $\mathbb{T}^2(r, R)$.

□

2.3. L'ombilicale, une courbe du tore.

Proposition 2.4. L'intersection de l'homogénéisé complexe de $\mathbb{T}^2(r, R)$ avec le plan à l'infini de $P_3(\mathbb{C})$ est l'ombilicale comptée deux fois.

Démonstration. D'après la proposition 2.2 et la remarque 1.13, l'équation de l'homogénéisé complexe de $\mathbb{T}^2(r, R)$ est :

$$\mathbb{T}^2(r, R)_{\mathbb{C}}^* : [X^2 + Y^2 + Z^2 + (R^2 - r^2)T^2]^2 = 4R^2(X^2 + Y^2)T^2.$$

On en déduit que l'on a :

$$\mathbb{T}^2(r, R)_{\mathbb{C}}^* \cap \{T = 0\} : (X^2 + Y^2 + Z^2)^2 = 0 \text{ et } T = 0.$$

En particulier, d'après la définition 1.8, l'ensemble des points à l'infini de $\mathbb{T}^2(r, R)_{\mathbb{C}}^*$ est d'équation :

$$(19) \quad (X^2 + Y^2 + Z^2)^2 = 0 \text{ et } T = 0.$$

Finalement, d'après (19) et la proposition 1.20, $\mathbb{T}^2(r, R)_{\mathbb{C}}^* \cap \{T = 0\}$ est l'ombilicale.

Par ailleurs, on introduit le polynôme suivant :

$$g := (T_1^2 + T_2^2 + T_3^2)^2 \in \mathbb{C}[T_1, T_2, T_3].$$

D'après (19), on a :

$$\mathbb{T}^2(r, R)_{\mathbb{C}}^* \cap \{T = 0\} : g(X, Y, Z) = 0 \text{ et } T = 0.$$

Pour déterminer la multiplicité des points de $\mathbb{T}^2(r, R)_{\mathbb{C}}^* \cap \{T = 0\}$, on s'intéresse aux dérivées partielles de g . Soit $[X : Y : Z : T] \in P_3(\mathbb{C})$, on constate que l'on a :

$$(20) \quad \begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial T_1}(X, Y, Z) &= 4X(X^2 + Y^2 + Z^2), \\ \frac{\partial g}{\partial T_2}(X, Y, Z) &= 4Y(X^2 + Y^2 + Z^2), \\ \frac{\partial g}{\partial T_3}(X, Y, Z) &= 4Z(X^2 + Y^2 + Z^2), \end{aligned}$$

et :

$$(21) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial T_1^2}(X, Y, Z) &= 12X^2 + 4Y^2 + 4Z^2, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial T_2^2}(X, Y, Z) &= 4X^2 + 12Y^2 + 4Z^2, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial T_3^2}(X, Y, Z) &= 4X^2 + 4Y^2 + 12Z^2. \end{aligned}$$

Soit $[X : Y : Z : T] \in \mathbb{T}^2(r, R)_{\mathbb{C}}^* \cap \{T = 0\}$, d'après (19) et (20), on a :

$$(22) \quad \begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial T_1}(X, Y, Z) &= 0, \\ \frac{\partial g}{\partial T_2}(X, Y, Z) &= 0, \\ \frac{\partial g}{\partial T_3}(X, Y, Z) &= 0. \end{aligned}$$

Par l'absurde, si toutes les dérivées secondes de g en (X, Y, Z) sont nulles, en particulier, avec (21), on aurait :

$$(23) \quad \begin{aligned} 2X^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 &= 0, \\ 2Y^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 &= 0, \\ 2Z^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 &= 0. \end{aligned}$$

Avec (19) et (23), il viendrait $(X, Y, Z, T) = (0, 0, 0, 0)$, ce qui est exclu d'après la définition-proposition 1.1. Dès lors, d'après la définition 1.22 et avec (22), les points de $\mathbb{T}^2(r, R)_{\mathbb{C}}^* \cap \{T = 0\}$ sont exactement doubles. Finalement, l'intersection de $\mathbb{T}^2(r, R)_{\mathbb{C}}^*$ avec le plan à l'infini de $P_3(\mathbb{C})$ est l'ombilicale comptée deux fois.

□

3. LES CERCLES DE VILLARCEAU, UNE FAMILLE REMARQUABLE DE CERCLES SUR LE TORE DE RÉVOLUTION

Définition 3.1. On appelle plan bitangent de $\mathbb{T}^2(r, R)$, un plan de \mathbb{R}^3 qui contient O et qui est tangent à $\mathbb{T}^2(r, R)$ en exactement deux points.

Théorème 3.2. L'intersection de $\mathbb{T}^2(r, R)$ avec un de ses plans bitangents est la réunion de deux cercles, on les appelle cercles de Villarceau.

Démonstration. Soit \mathcal{P}_b un plan bitangent à $\mathbb{T}^2(r, R)$, disons en M_1, M_2 . D'après la proposition 2.4, $\mathbb{T}^2(r, R)_{\mathbb{C}}^*$ contient doublement l'ombilicale. Or, d'après la définition 1.18, les points cycliques de \mathcal{P}_b sont sur l'ombilicale, si bien que $\mathbb{T}^2(r, R)_{\mathbb{C}}^* \cap \mathcal{P}_b$ a les points cycliques de \mathcal{P}_b comme points doubles. Par ailleurs, d'après la définition-proposition 1.11 et les propositions 1.24, 2.2 et 2.3, $\mathbb{T}^2(r, R)_{\mathbb{C}}^* \cap \mathcal{P}_b$ est une courbe algébrique plane de degré inférieur ou égal à 4 dont les points M_1 et M_2 sont au moins doubles. En résumé, $\mathbb{T}^2(r, R)_{\mathbb{C}}^* \cap \mathcal{P}_b$ est une quartique possédant les points cycliques de \mathcal{P}_b comme points doubles et dont les points M_1, M_2 sont au moins doubles. En particulier, d'après le corollaire 1.31, $\mathbb{T}^2(r, R)_{\mathbb{C}}^* \cap \mathcal{P}_b$ se décompose en deux coniques projectives se recoupant aux points cycliques de \mathcal{P}_b . Finalement, d'après la proposition 1.16, $\mathbb{T}^2(r, R)_{\mathbb{C}} \cap \mathcal{P}_b$ est la réunion de deux cercles. \square

ANNEXE A. LES CERCLES DE VILLARCEAU, DES GRANDS CERCLES
DU TORE DE RÉVOLUTION

Proposition A.1. Les cercles de Villarceau de $\mathbb{T}^2(r, R)$ en sont des grands cercles *i.e.* ils sont tous les deux de rayon R .

Démonstration. Soit \mathcal{C} un cercle de Villarceau de $\mathbb{T}^2(r, R)$, on note Ω son centre et ρ son rayon. On introduit également M un des points d'intersection des deux cercles de Villarceau de $\mathbb{T}^2(r, R)$ et N un des points d'intersection d'un des cercles de Villarceau avec la droite $(O\Omega)$.

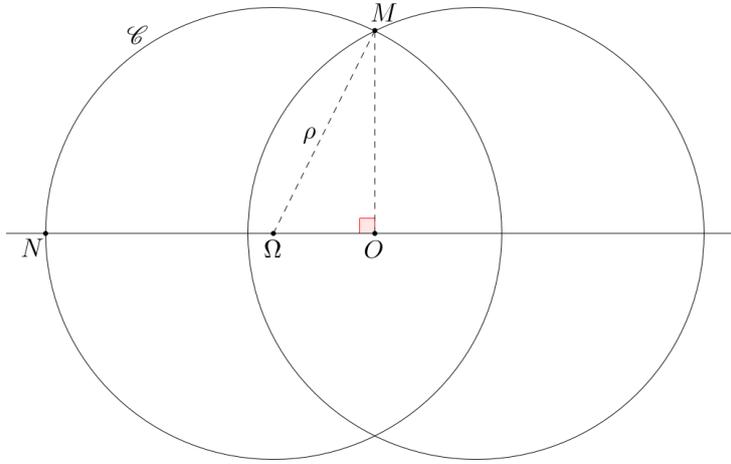


FIGURE 11. Vue en coupe de $\mathbb{T}^2(r, R)$ dans un plan bitangent.

Par construction de $\mathbb{T}^2(r, R)$ et de \mathcal{C} , on a :

$$(24) \quad ON = R + r.$$

Dès lors, en se référant à la figure 11, avec (24), on a :

$$(25) \quad O\Omega = ON - \Omega N = R + r - \rho.$$

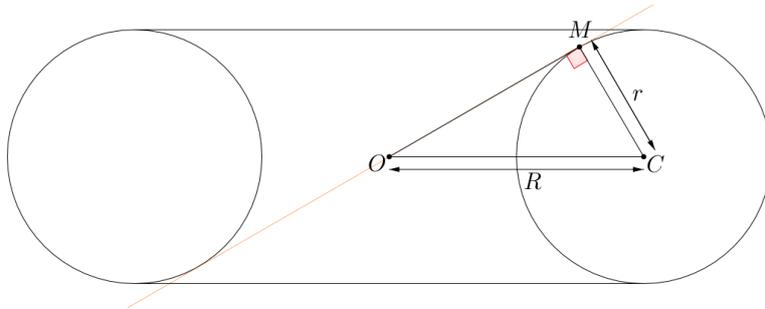


FIGURE 12. Vue en coupe de $\mathbb{T}^2(r, R)$ dans le plan $(\hat{x}O\hat{y})$.

Par construction, la droite (OM) est tangente à un des cercles méridiens de $\mathbb{T}^2(r, R)$, si bien que le triangle OMC est rectangle en M (voir la figure 12). Dès lors, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$(26) \quad OM = \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Ainsi, d'après le théorème de Pythagore dans ΩOI et avec (26), on a :

$$(27) \quad O\Omega^2 = \rho^2 - OM^2 = \rho^2 + r^2 - R^2.$$

En rapprochant (25) et (27), on a :

$$\begin{aligned} (R + r - \rho)^2 = \rho^2 + r^2 - R^2 &\Leftrightarrow R^2 + r^2 + 2rR - 2\rho(R + r) + \rho^2 = \rho^2 + r^2 - R^2 \\ &\Leftrightarrow 2\rho(R + r) = 2R^2 + 2rR \\ &\Leftrightarrow 2\rho(R + r) = 2R(R + r) \\ &\Leftrightarrow \rho = R. \end{aligned}$$

Finalement, on a $\rho = R$.

□

RÉFÉRENCES

- [Aud06] M. Audin. *Géométrie*, pages 117, 192, 239, 256–257. EDP Sciences, 2006.
- [Ber87] M. Berger. *Geometry II*, pages 304–305. Springer, 1987.
- [Ber09] M. Berger. *Géométrie vivante ou l'échelle de Jacob*, pages 32–35, 67–68, 120–121, 157–158, 217, 236–237, 253–255. Cassini, 2009.
- [Ber10] M. Berger. Les cercles de Villarceau. *BibNum*, 2010.
- [Far07] Rida T. Farouki. *Pythagorean-Hodograph Curves : Algebra and Geometry Inseparable*, pages 112–116, 199–207, 214–219. Springer, 2007.
- [Fel] D. Feldmann. Géométrie projective et cercles de Villarceau.
- [Hir02] A. Hirsch. Extension of the "Villarceau-Section" to the Surfaces of Revolution with a Generating Conic. *Journal for Geometry and Graphics (6)*, pages 121–132, 2002.
- [Per95] D. Perrin. *Géométrie algébrique : une introduction*, pages 21–22, 34–35. EDP Sciences/CNRS Éditions, 1995.
- [Sam86] P. Samuel. *Géométrie projective*, pages 13–15, 26–29. Presses Universitaires de France, 1986.